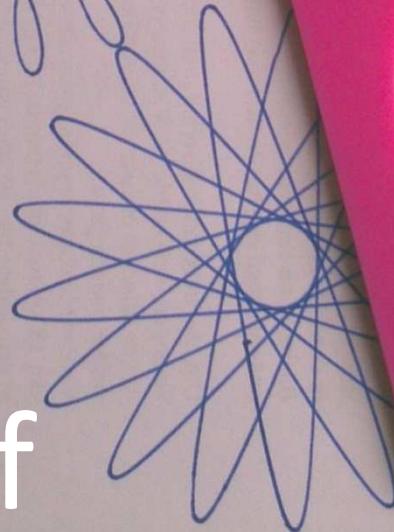
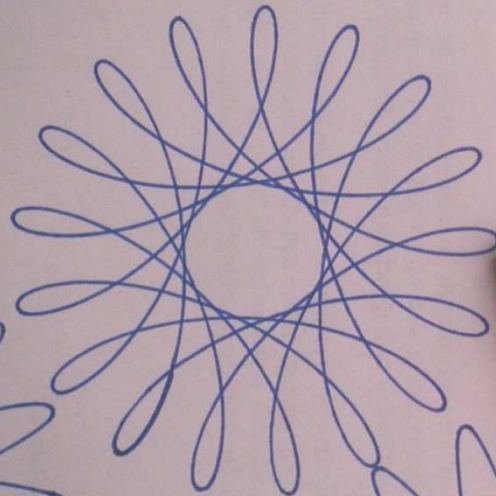
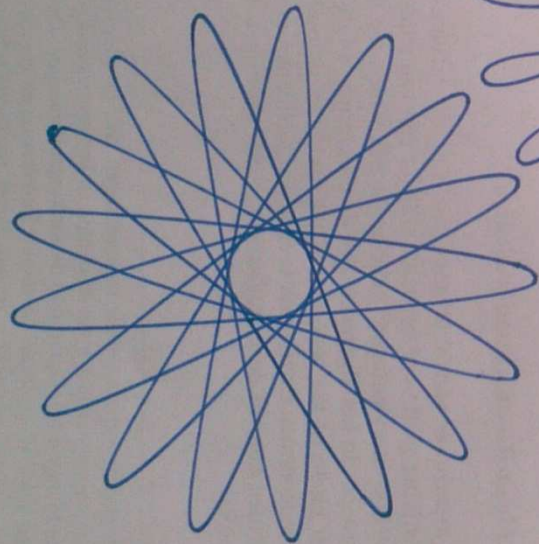
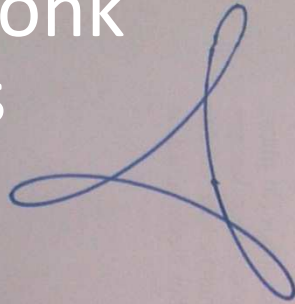
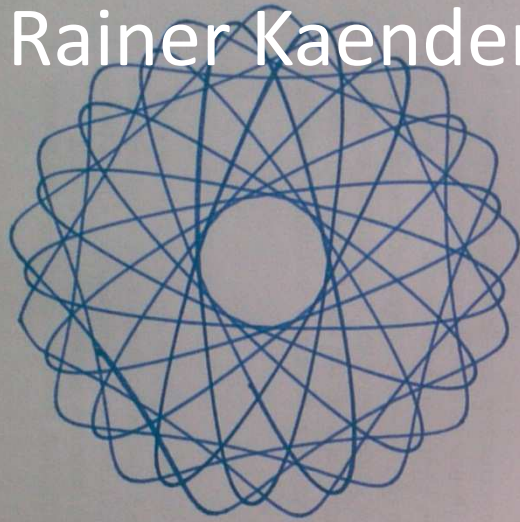
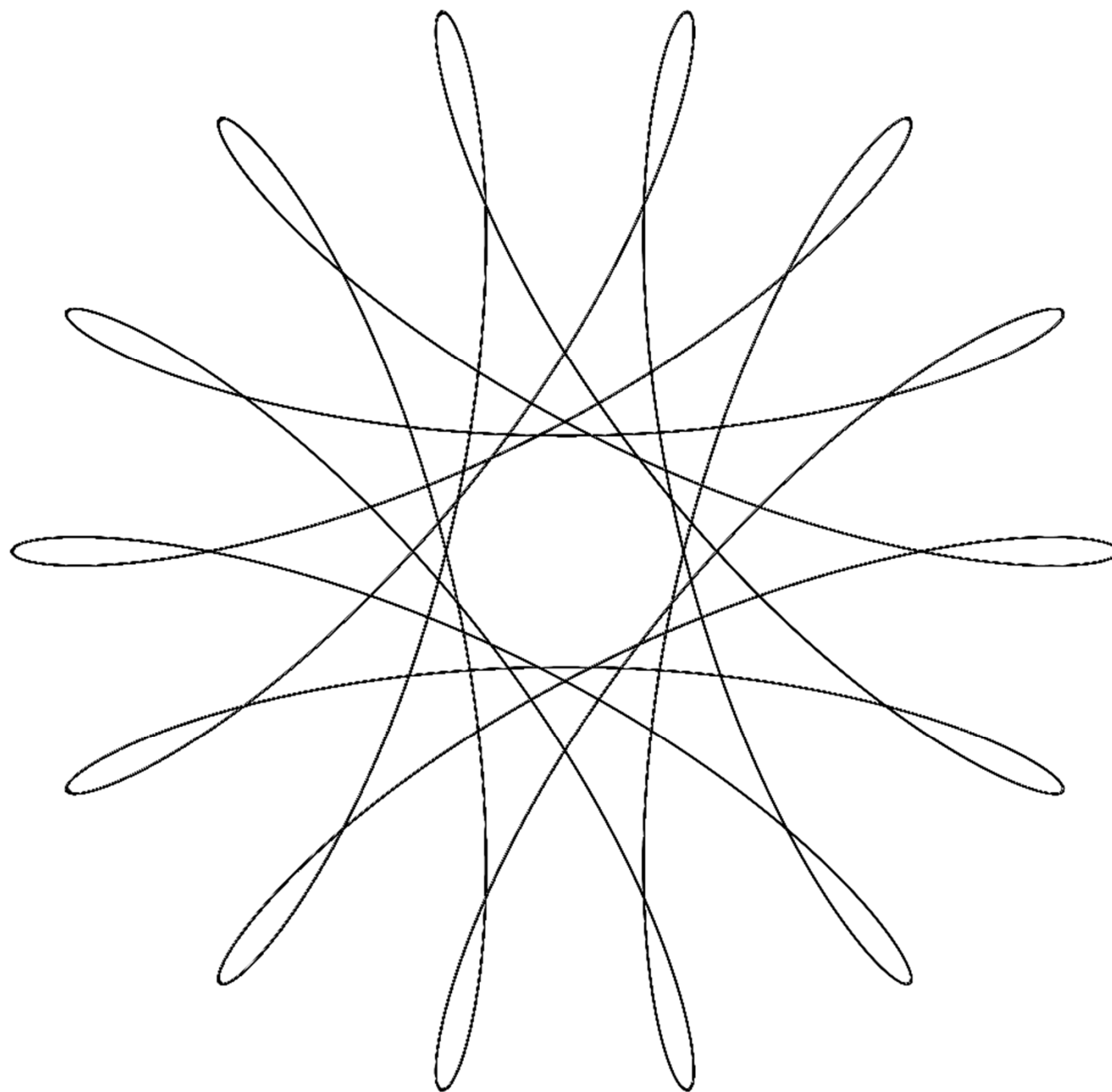


Stephan Berendonk
Rainer Kaenders



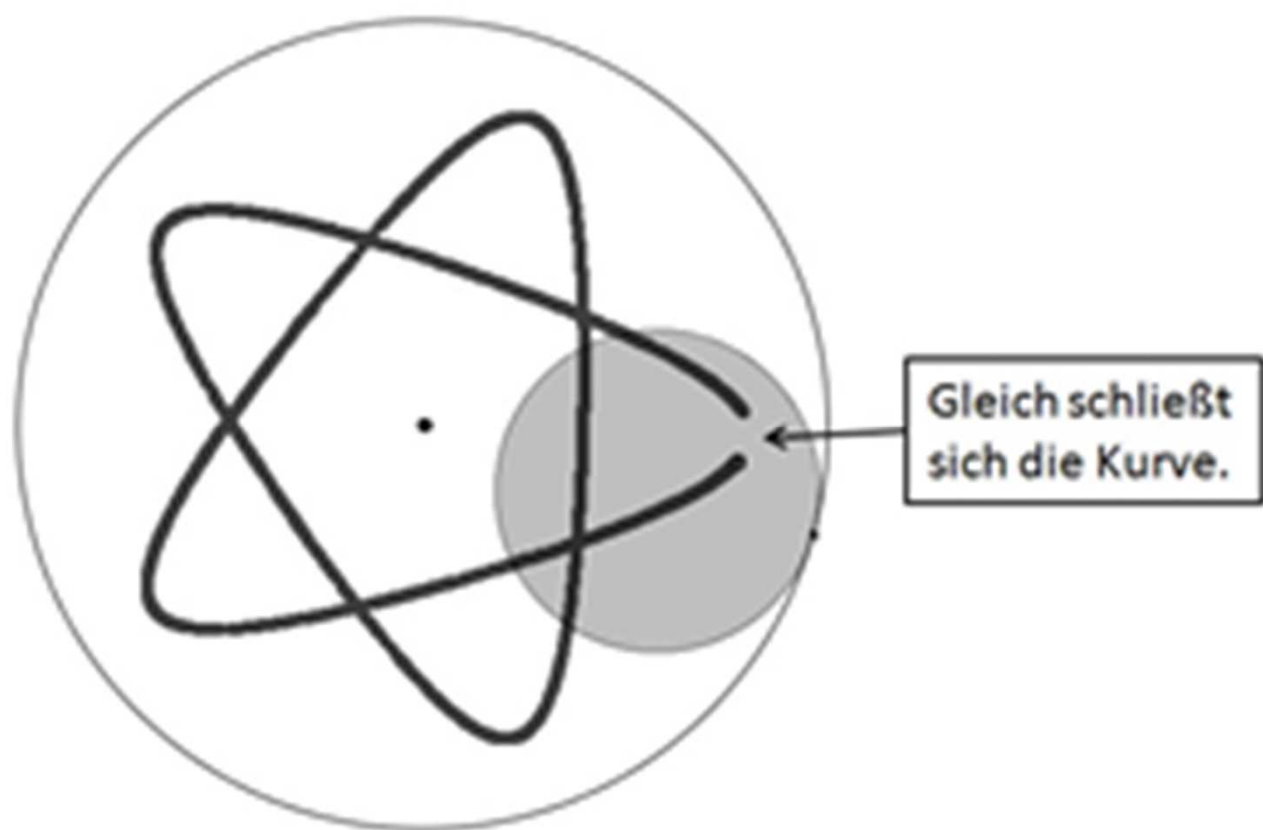
De spirograaf

Workshop NWD

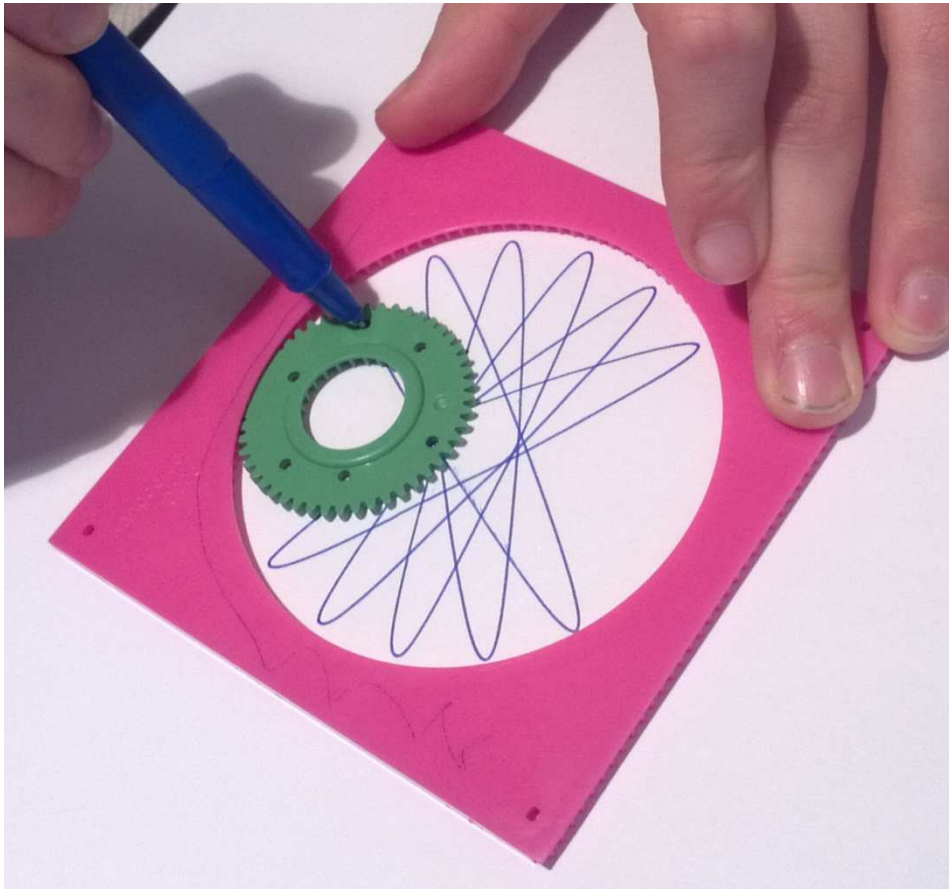


De spirograaf beleven

15:30 – 15:35	Opening
15:35 – 16:00	Tekenen, tellen, erover praten en vragen stellen
16:00 – 16:10	Dialogoog en vragen inventariseren
16:10 – 16:20	Rekenen met de spirograaf
16:20 – 16:45	Polhodie en herpolhodie ontdekken
16:45 – 17:00	Beleven van wiskunde aan de hand van de spirograaf



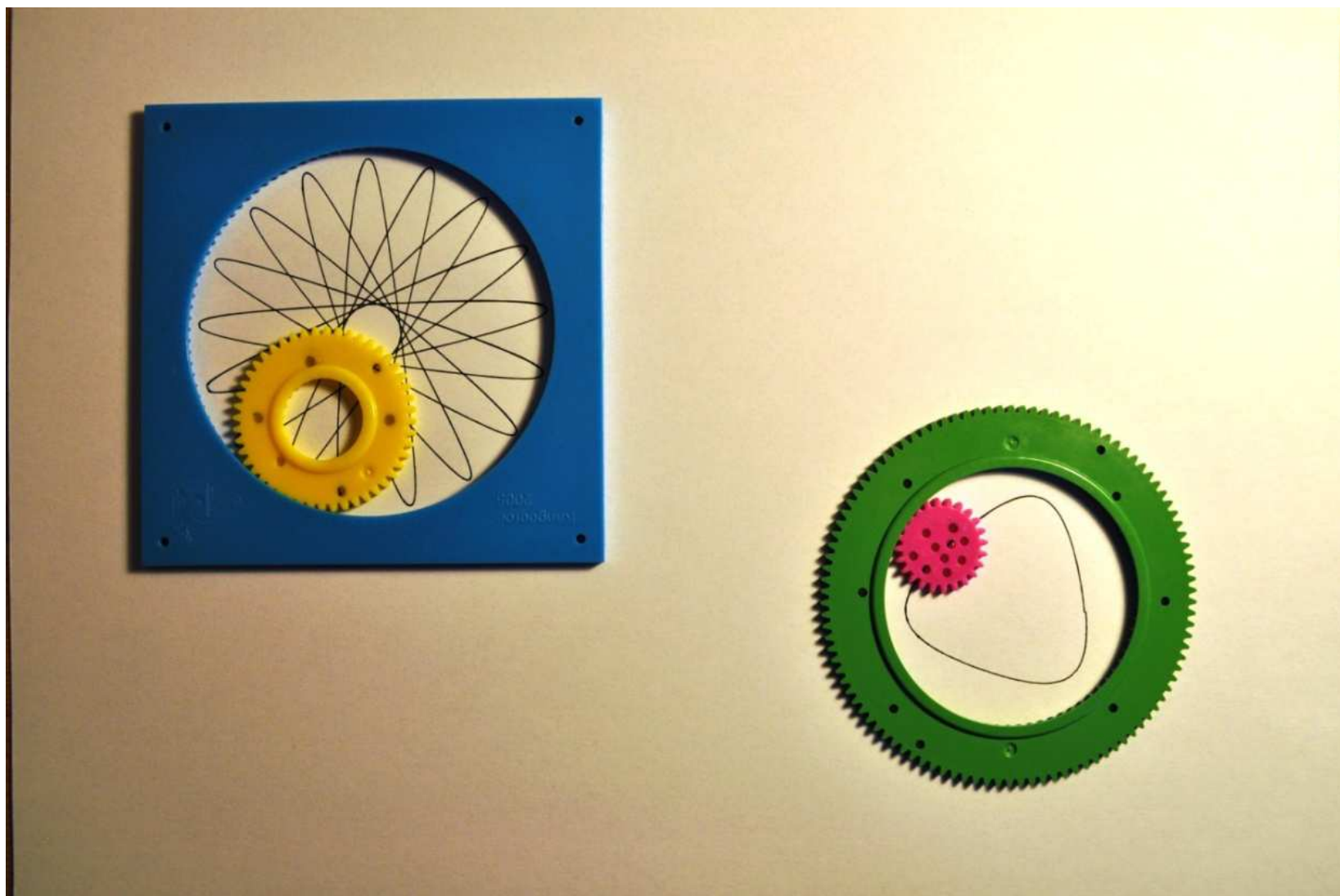
Tekenen, tellen en erover praten



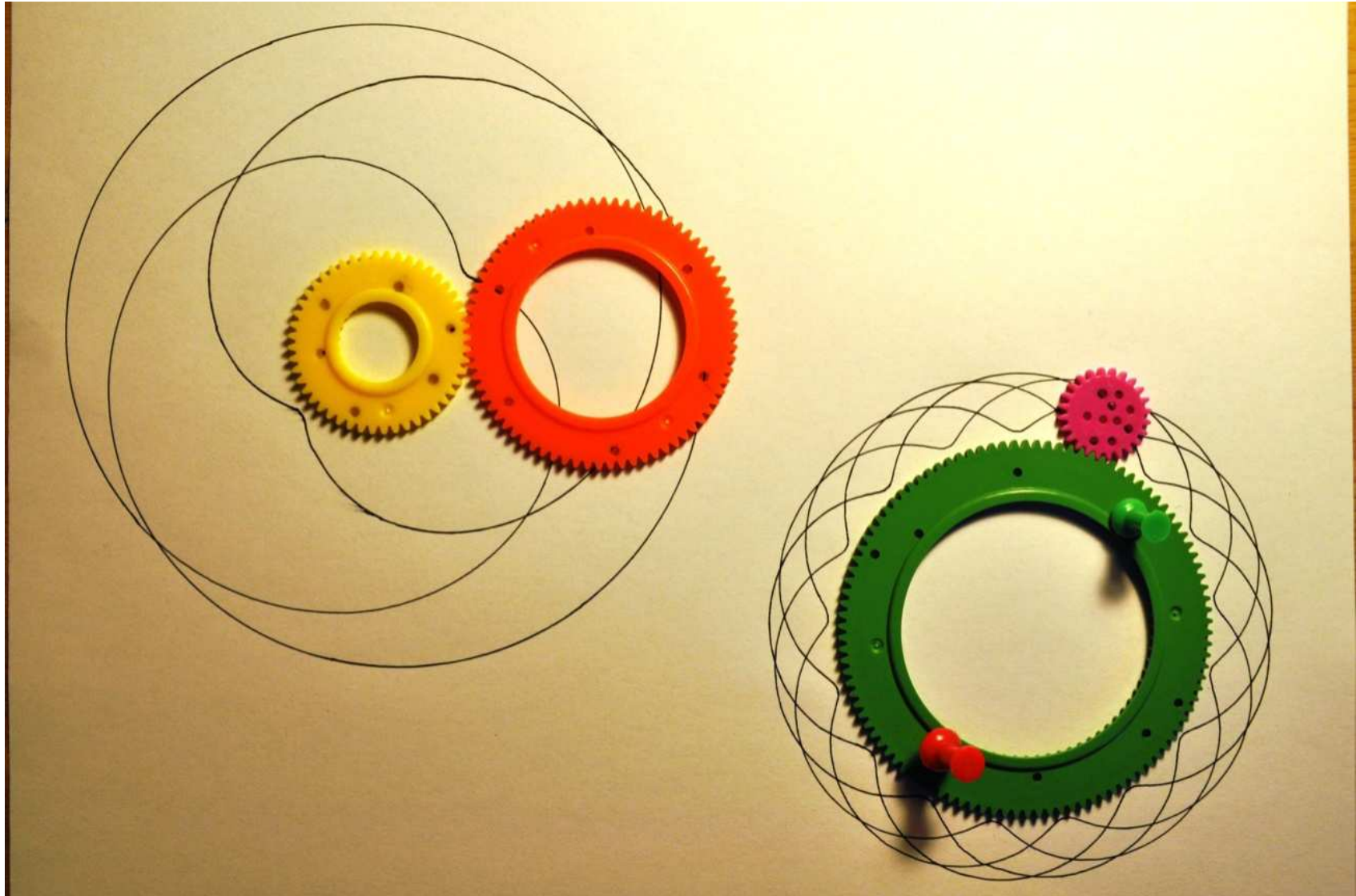
Opgave:

- a) Maakt u verschillende tekeningen met de spirograaf. Probeer verschillende kleuren en combinaties van schijven uit.
- b) Gaat u tellen aan de spirograaf wat er te tellen is. Wat zijn de meest belangrijke getallen bij een spirografenkromme? Ziet u wellicht verbanden?

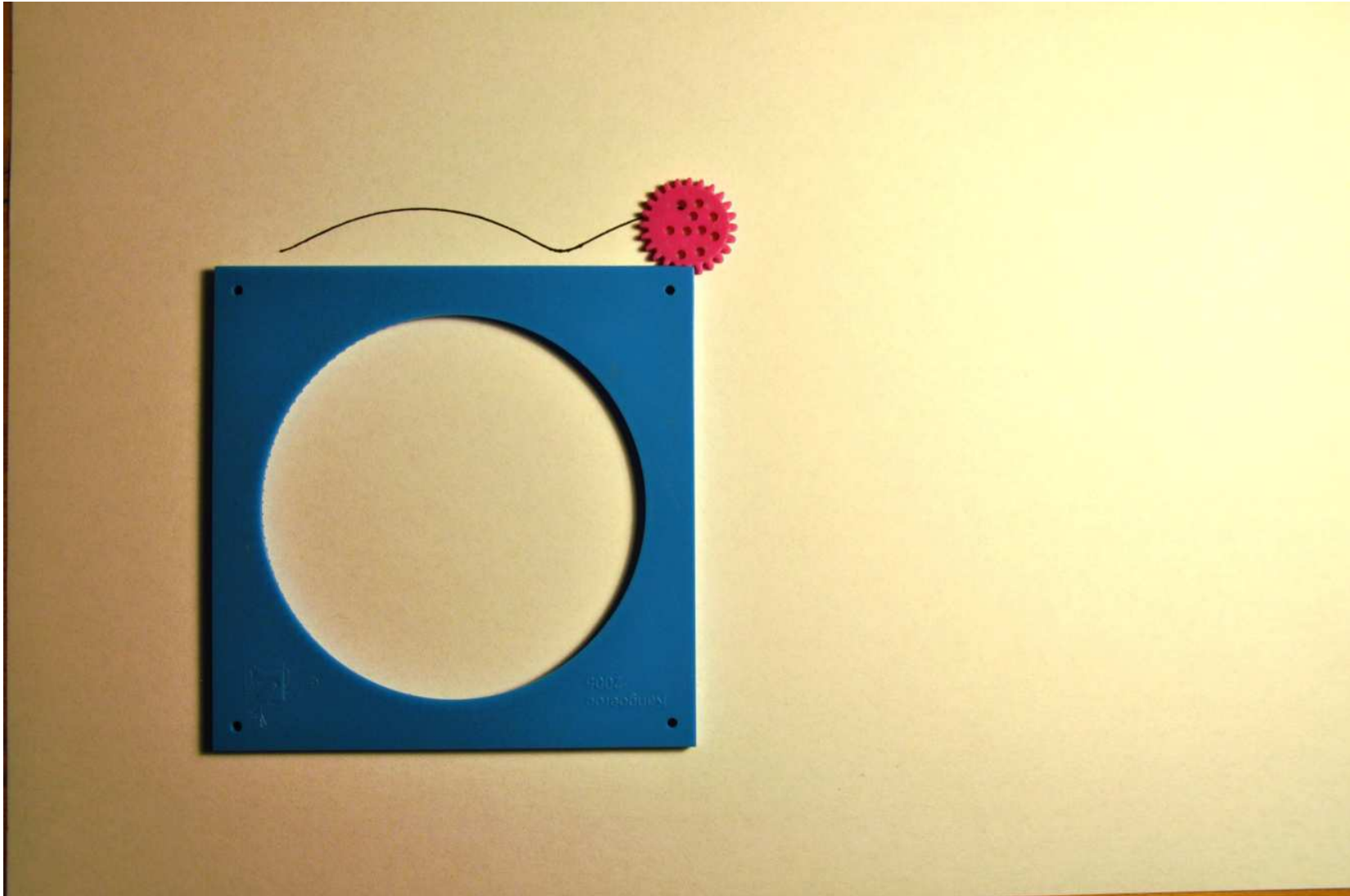
Manieren van afrollen



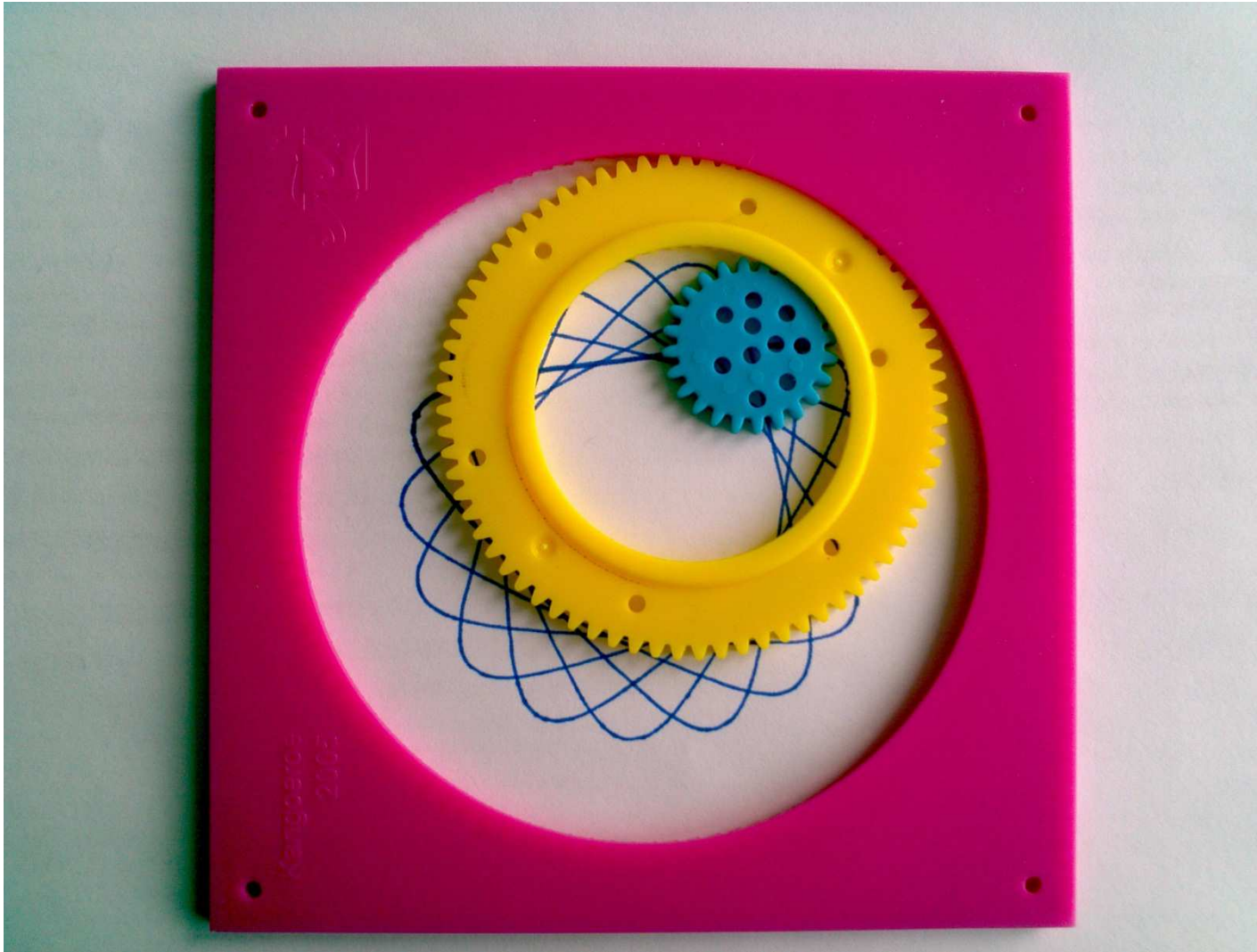
Manieren van afrollen



Manieren van afrollen

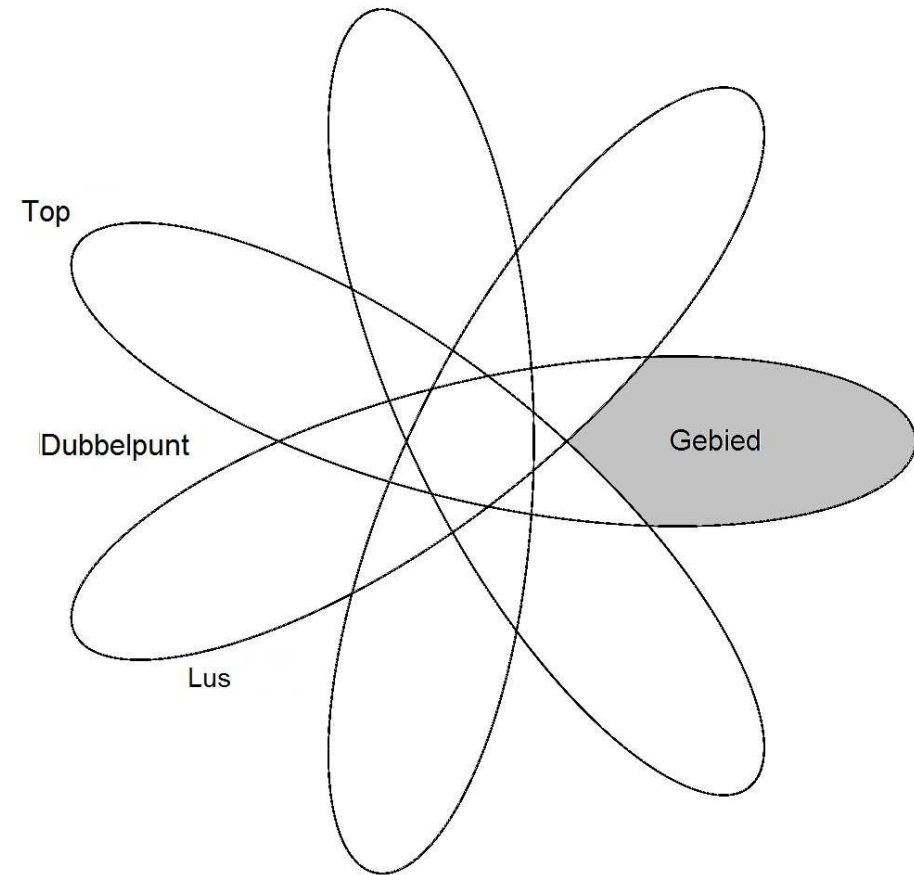
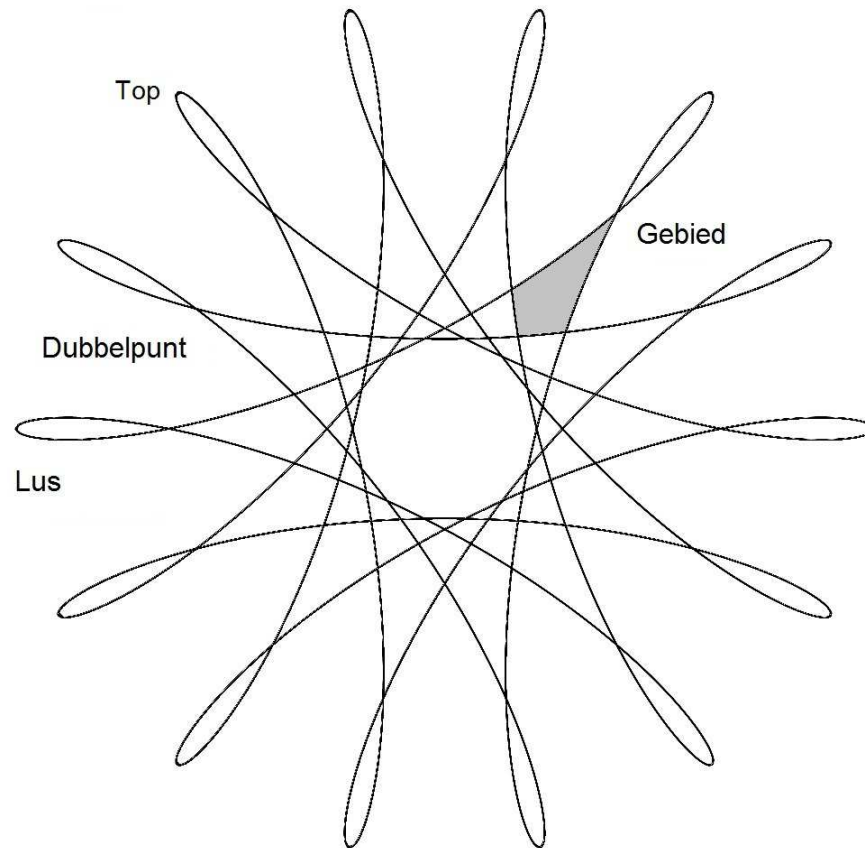


Triograaf

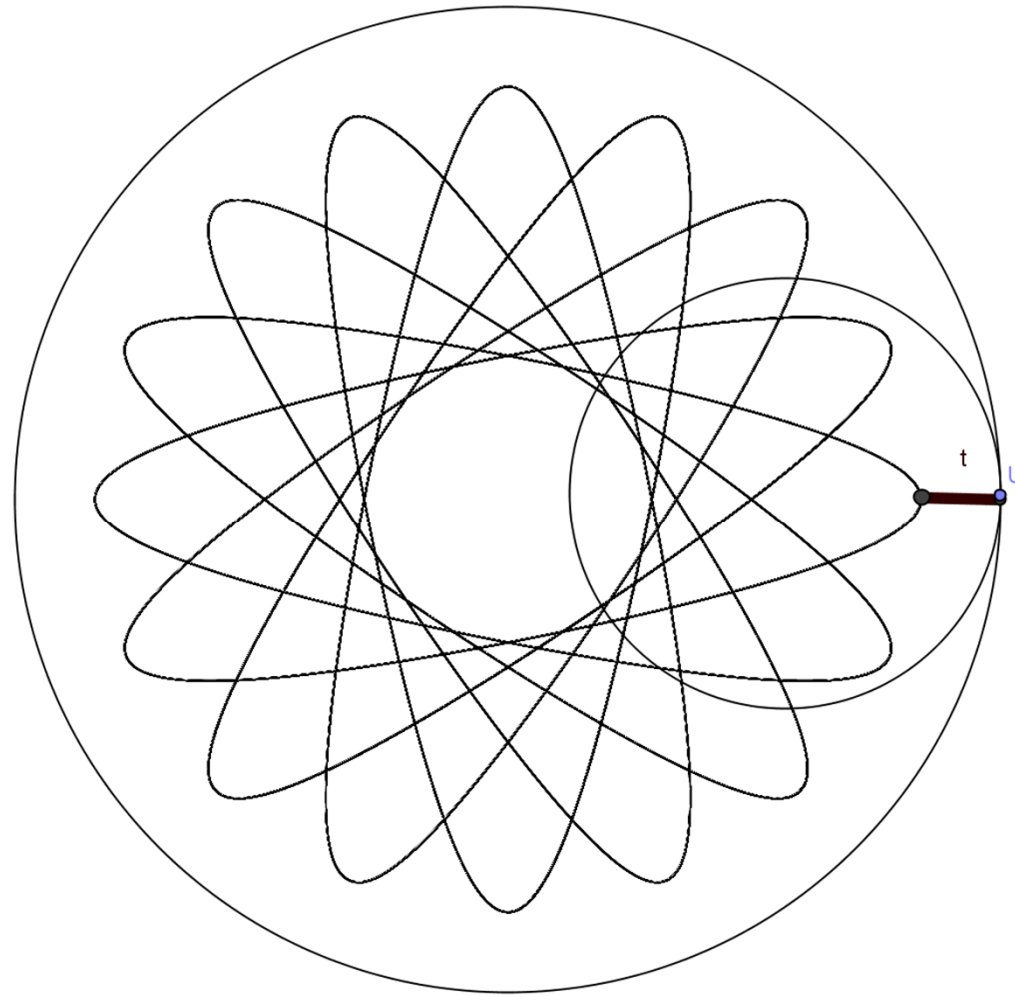


Rekenen met de spirograaf

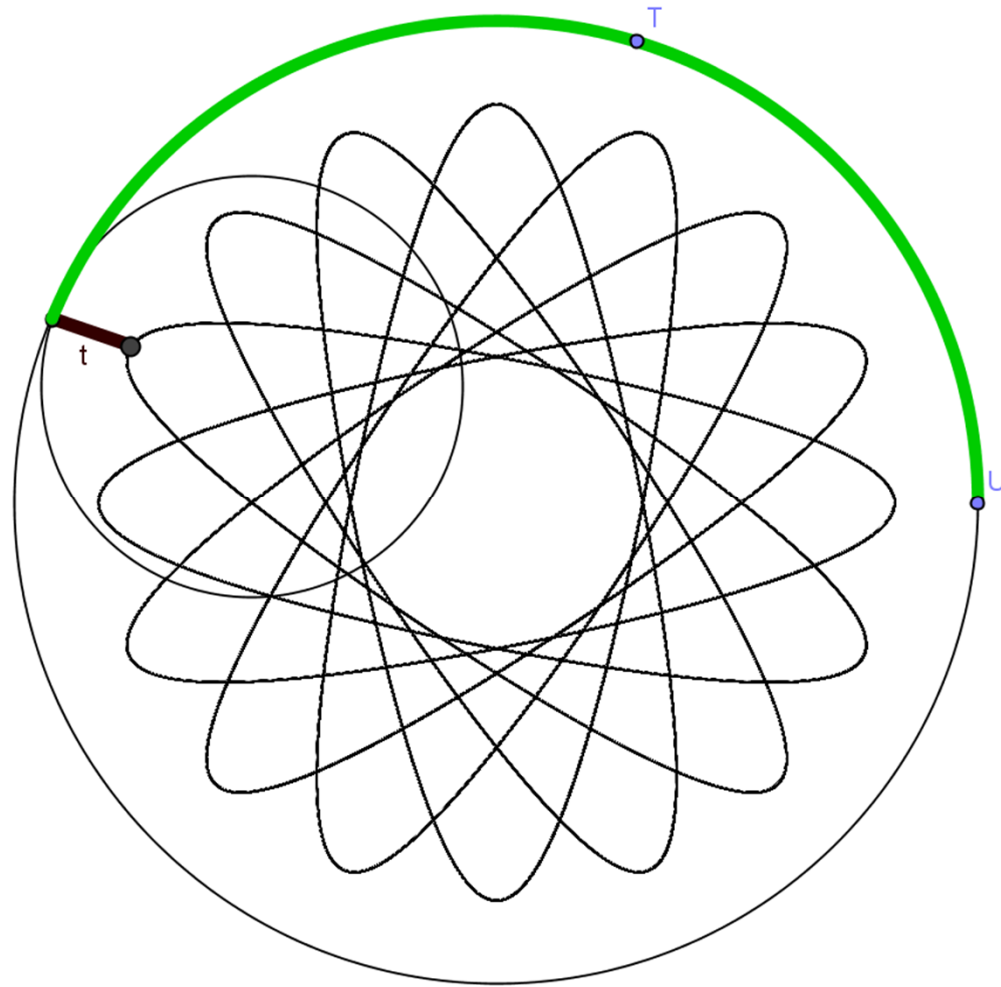
Spirografentaal



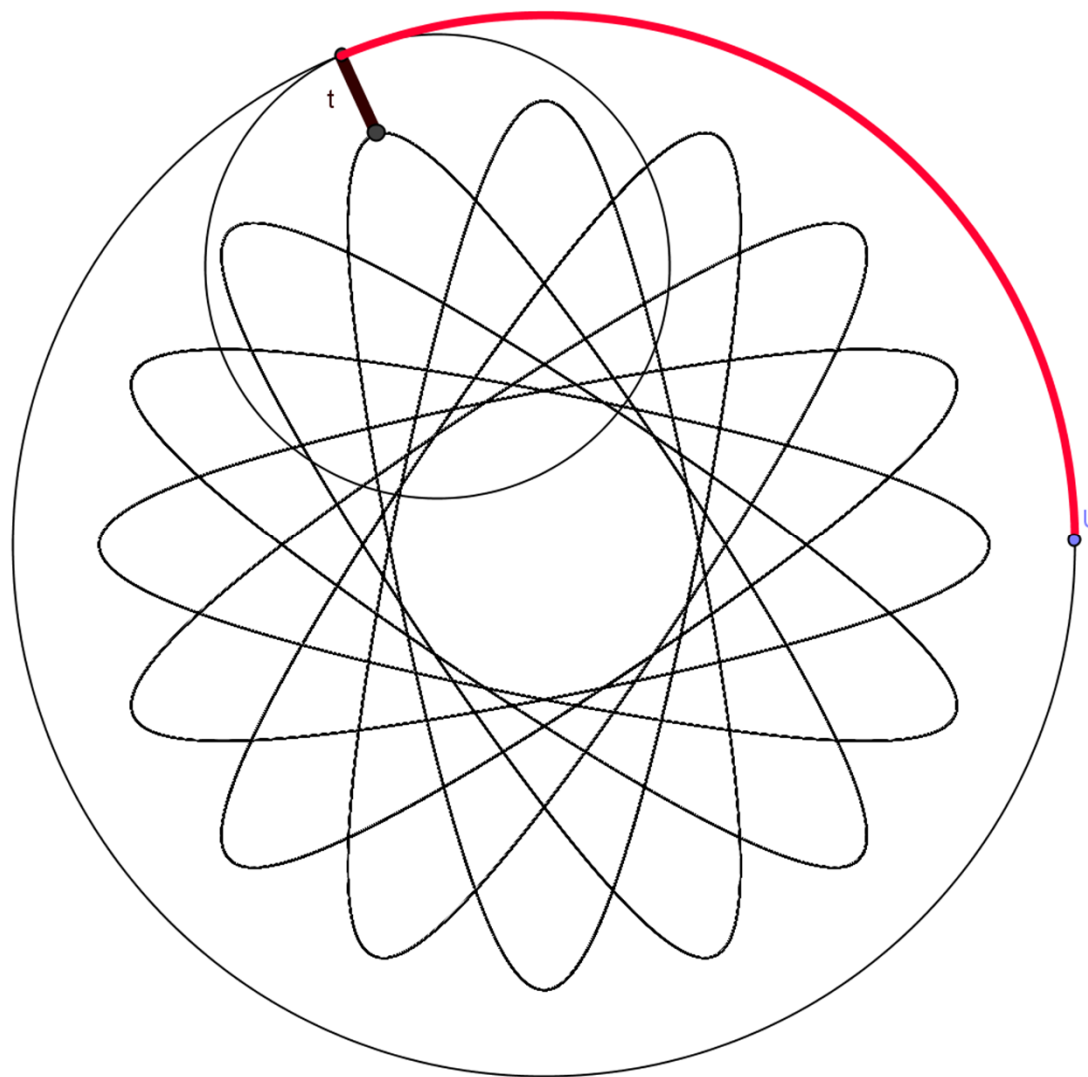
Rekenen met de spirograaf



Rekenen met de spirograaf



Delen met rest



ggd lineair combineren

- n aantal tanden grote wiel
- k aantal tanden kleine wiel
- Of euclidisch algoritme doorvoeren
- Zoek tot op veelvoud van n na het kleinste getal

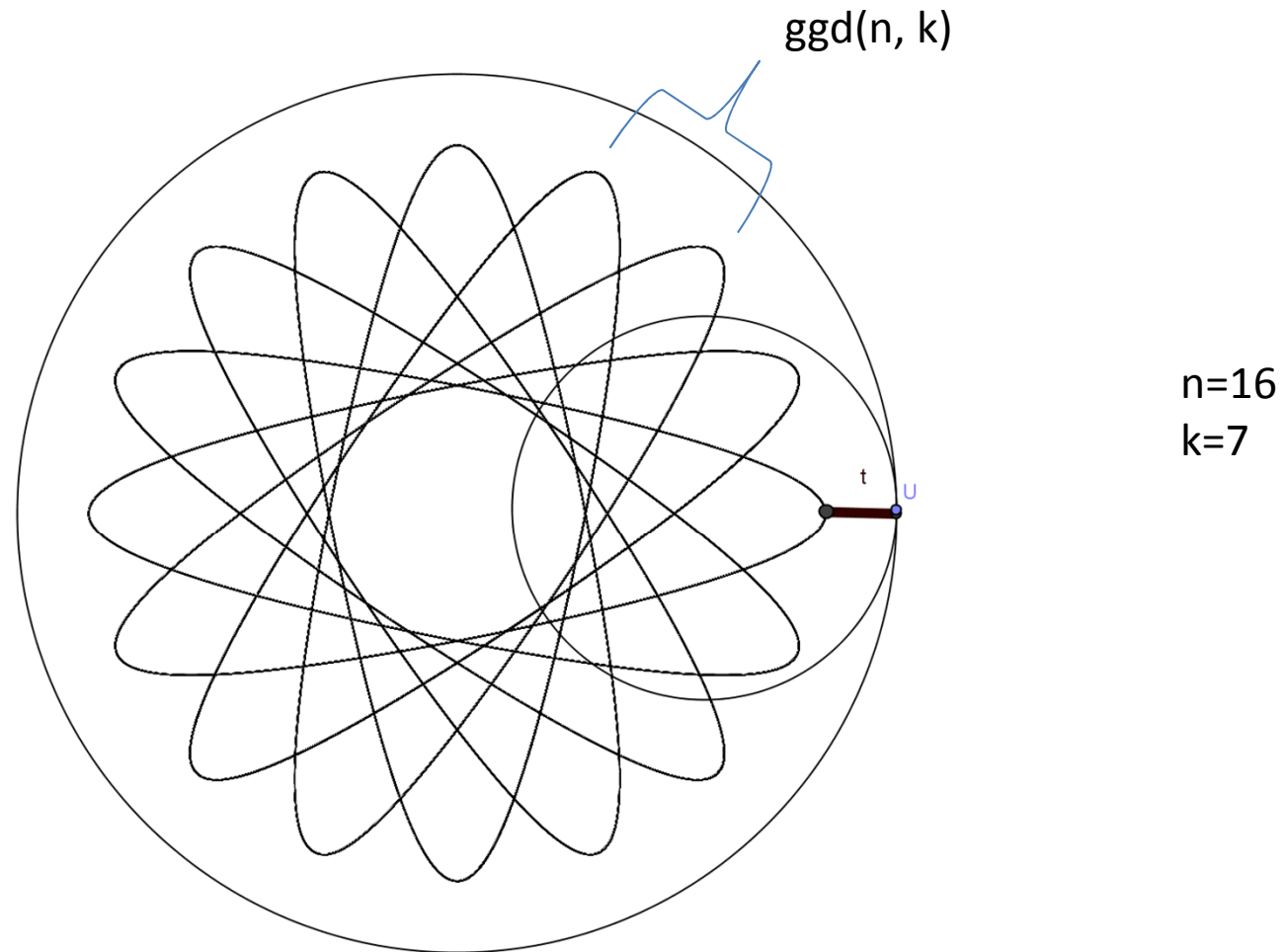
$$y \cdot k.$$

- Zoek de kleinste mogelijkheid voor de uitdrukking

$$y \cdot k - x \cdot n.$$

met x, y gehele getallen. Dat is de ggd!

Rekenen met de spirograaf



$kgv(n, k)$ is het minimale aantal tanden dat moet worden afgelegd, voor dat de kromme weer sluit.

Krommen raden

grote wiel, binnen $n = 28$ tanden,
kleine wiel, buiten $k = 8$ tanden.

Krommen raden

grote wiel, **binnen** $n = 28$ tanden,

kleine wiel, **buiten** $k = 8$ tanden.

Over hoeveel tanden z moet worden afgerold tot dat de **kromme sluit**?

***a.* 8**

***b.* 28**

***c.* 56**

***d.* 224**

Krommen raden

grote wiel, **binnen** $n = 28$ tanden,

kleine wiel, **buiten** $k = 8$ tanden.

Over hoeveel tanden z moet worden afgerold tot dat de **kromme sluit**?

Antwoord **c**!

$z = 56$ tanden, omdat $z = \text{kgV}(8, 28) = 56$ is.

Krommen raden

grote wiel, **binnen** $n = 28$ tanden,

kleine wiel, **buiten** $k = 8$ tanden.

... hoeveel toppen z heeft de ontstaande kromme?

a. 7

b. 8

c. 14

d. 28

Krommen raden

grote wiel, **binnen** $n = 28$ tanden,

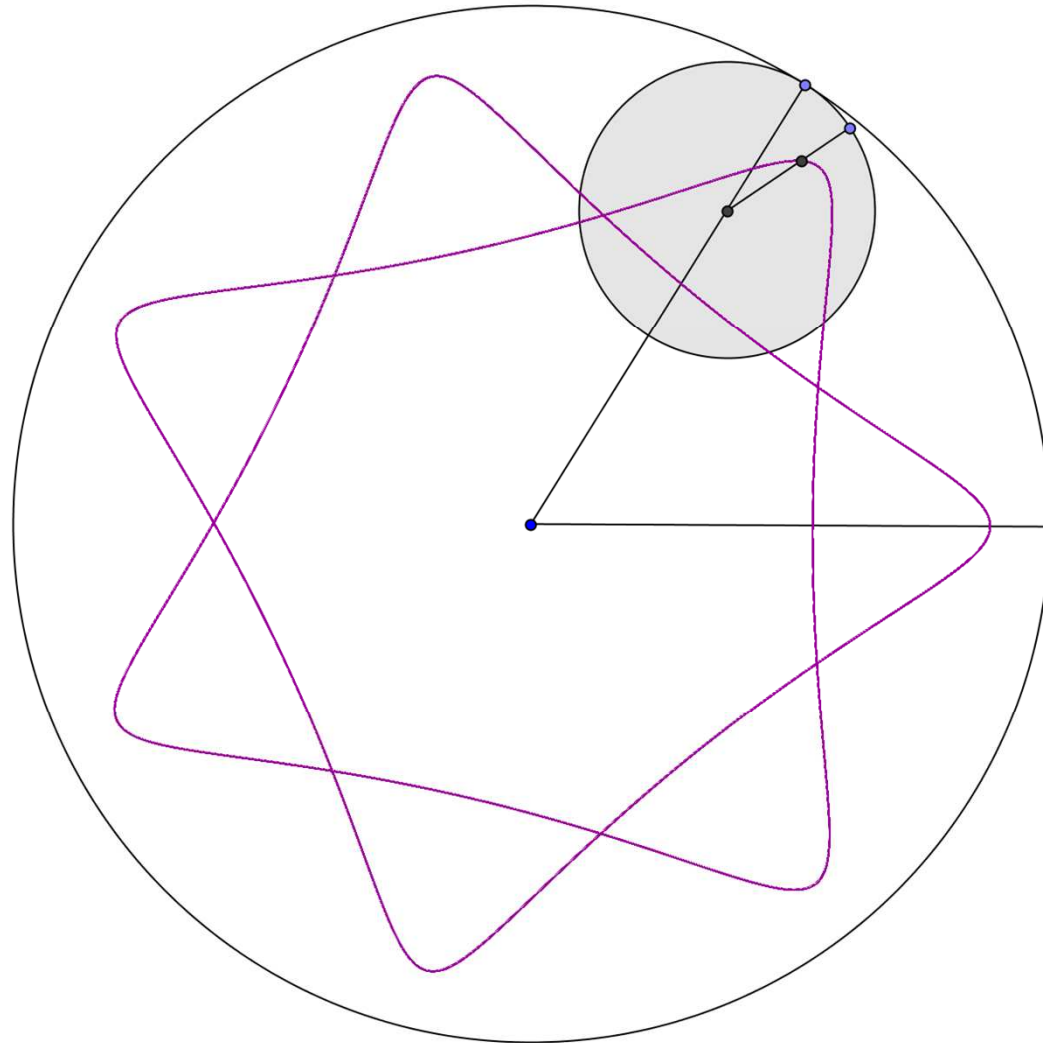
kleine wiel, **buiten** $k = 8$ tanden.

... hoeveel toppen t heeft de ontstaande kromme?

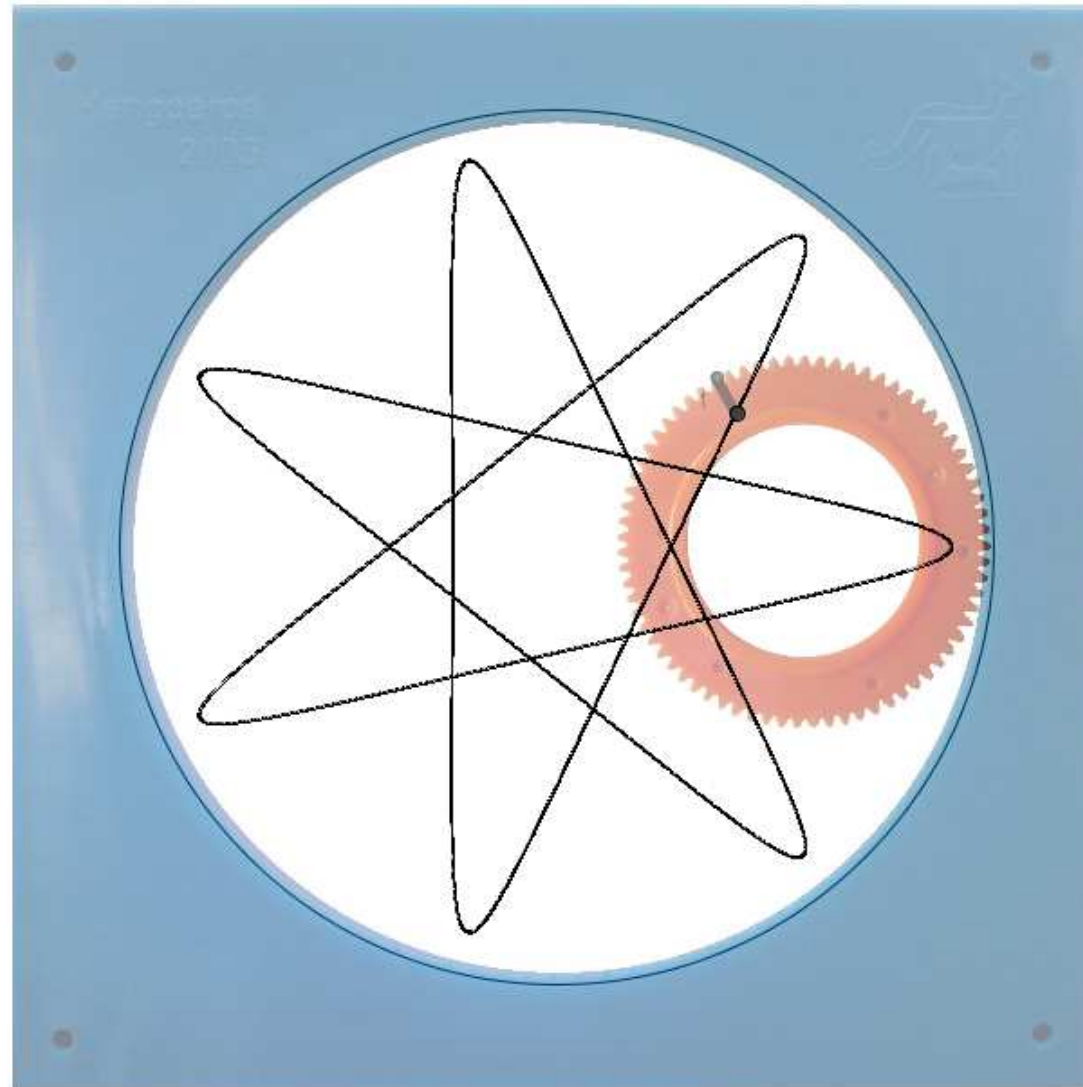
Antwoord **a**!

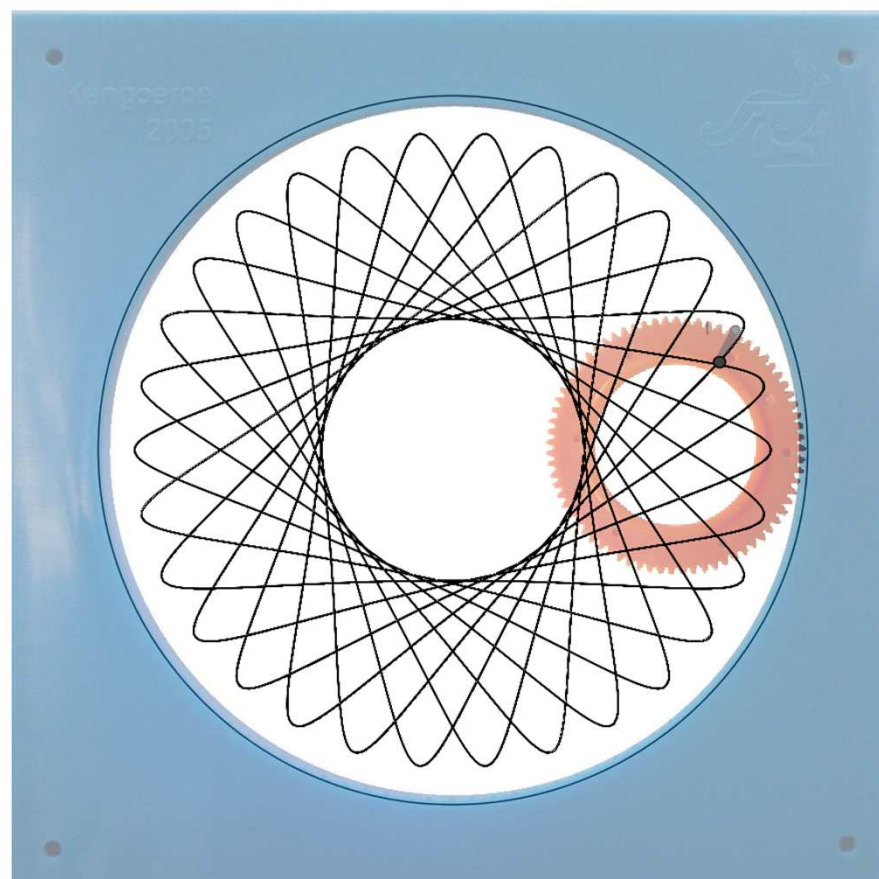
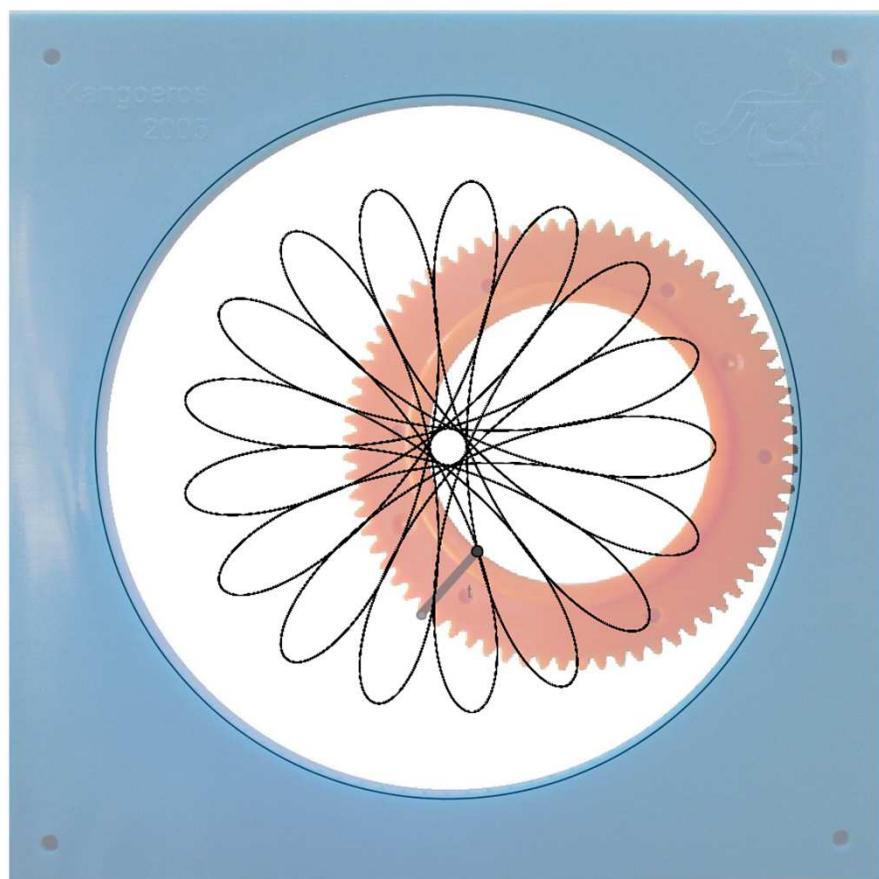
$t = 7$ toppen, omdat $t = z : k = 56 : 8 = 7$ is.

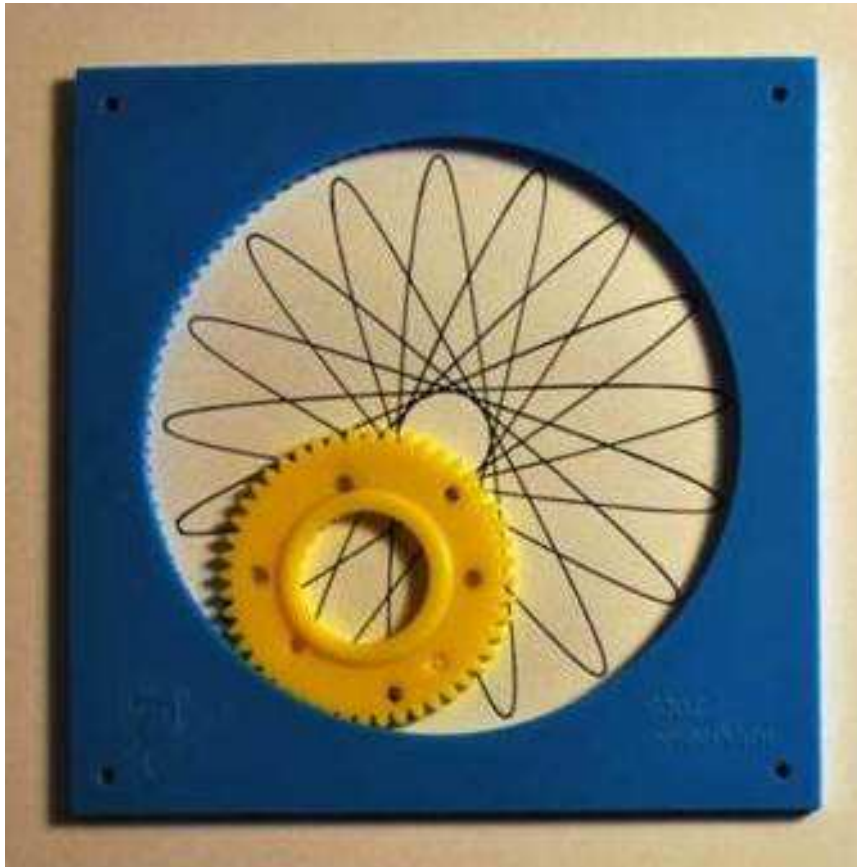
Klopt!



Uitbreiden met gereedschappen







Opgave: Vragen stellen

Stelt u per groepje vijf vragen over de spirograaf! Die vragen gaan we inventariseren.

Inspiratie

- *„Sterne, Blumen, Zacken, stumpf und scharf – das alles kann der Spirograph“*

College KölnerKinderUni 2011 door leerlingen Dilay, Ira, Kristin
begeleid door Mareike Mink, Tommy Schmidt

- Discussies met Leon van den Broek
(boekbijdrage, scriptie, Kangoeroe Camp
Eberwalde en Zebra-boek)
- Kölner Mathematikturnier



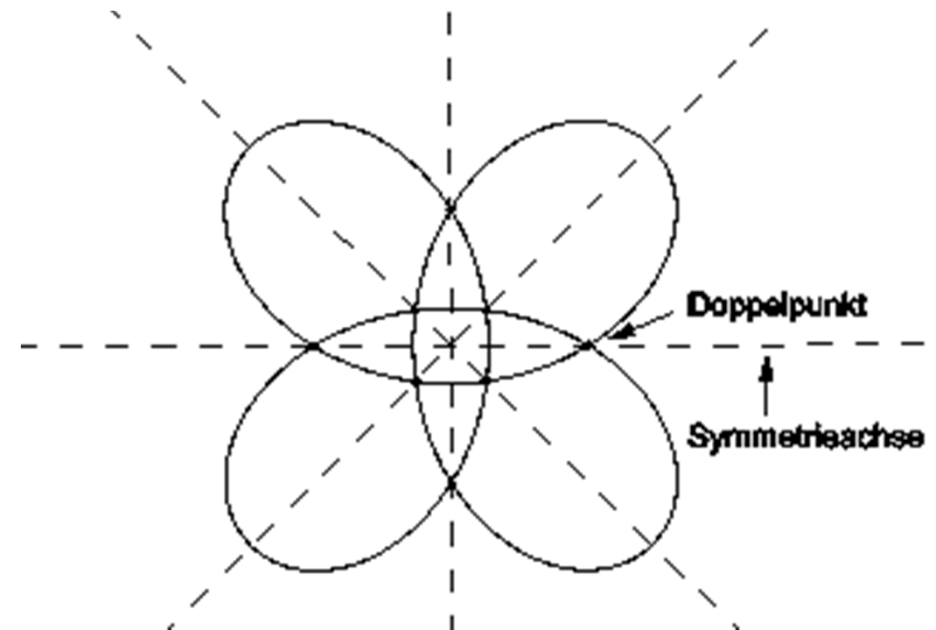
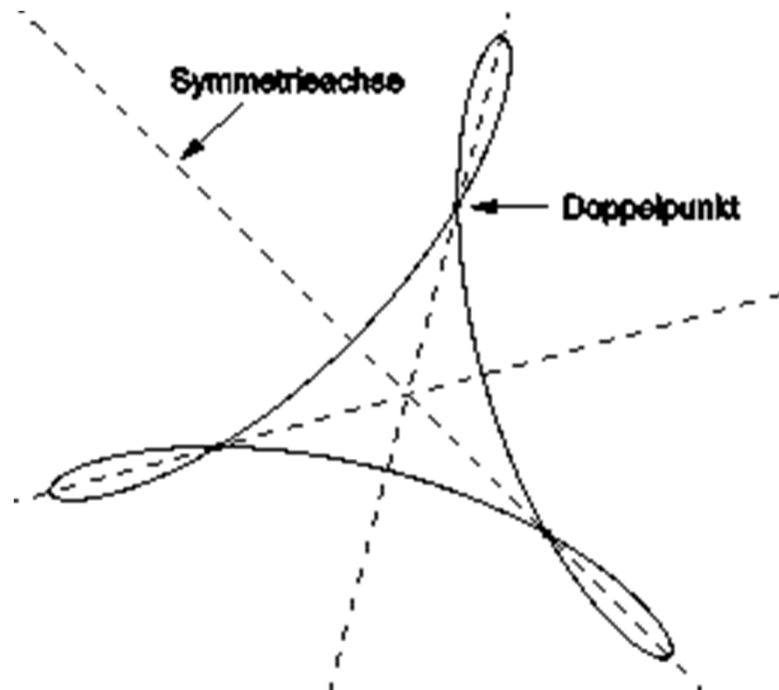
Mathe AG

Gibt es Ähnlichkeiten zwischen den Verhältnissen Umfänge aufeinanderfolgender Schritten?
Kann man aus dem Verhältnis der Umfänge (Anzahl der Zähne) die Form der Kurve
Kann man die Form der Kurve allgemein vorhersagen / mathematisch beschreiben?
Wie viele Kurven kann man mit dem Spirographen zeichnen?
Kann man die Länge der Bahnen vorhersagen?
Sind dies immer geschlossene Kurven?
Welche Typen von Kurven gibt es?

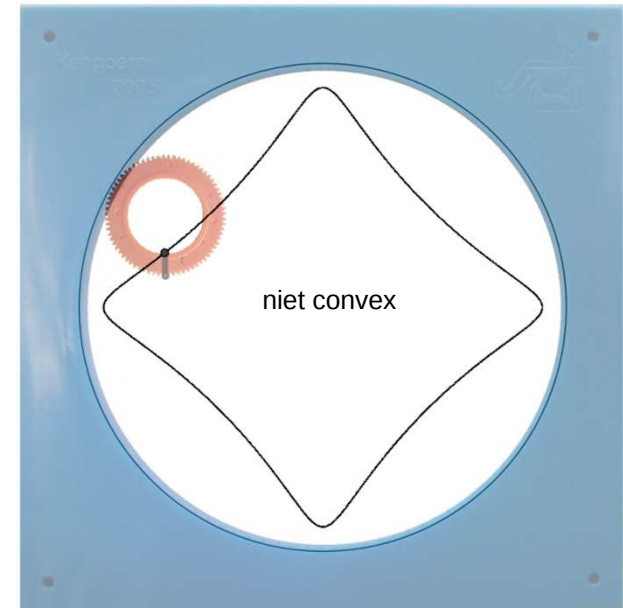
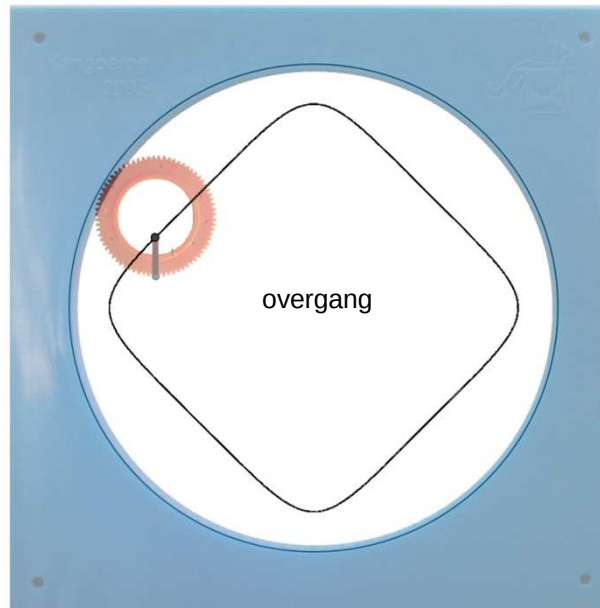
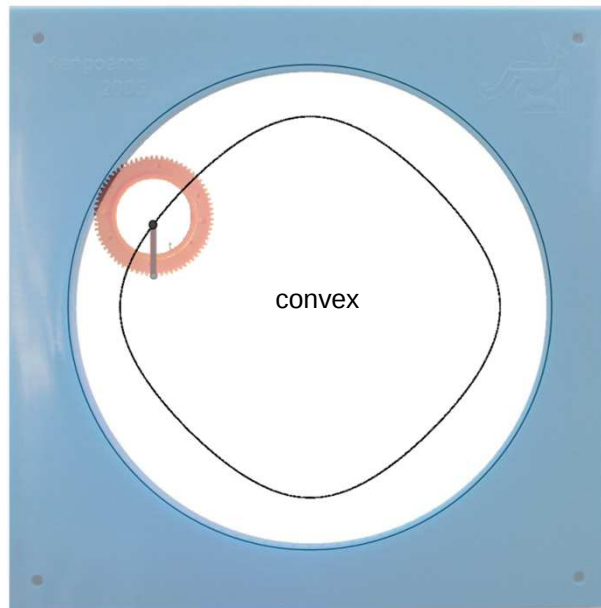
Dialog en vragen inventariseren

... ER IS NOG MEER

Symmetriegruppe: $D_{n/\text{ggd}(n,k)} = D_{\text{kgv}(n,k)}/k$

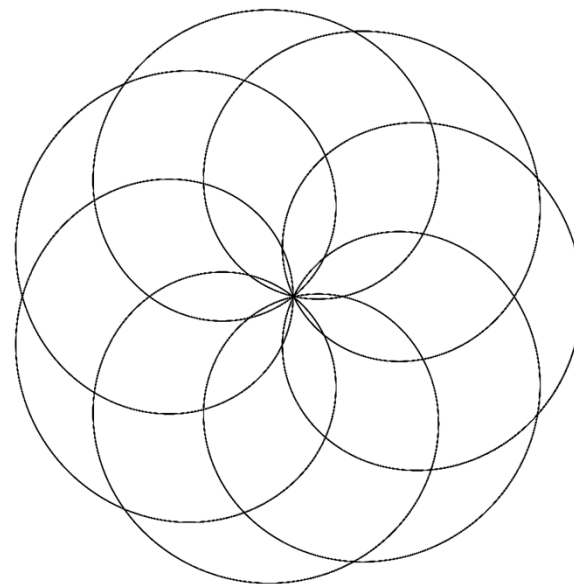
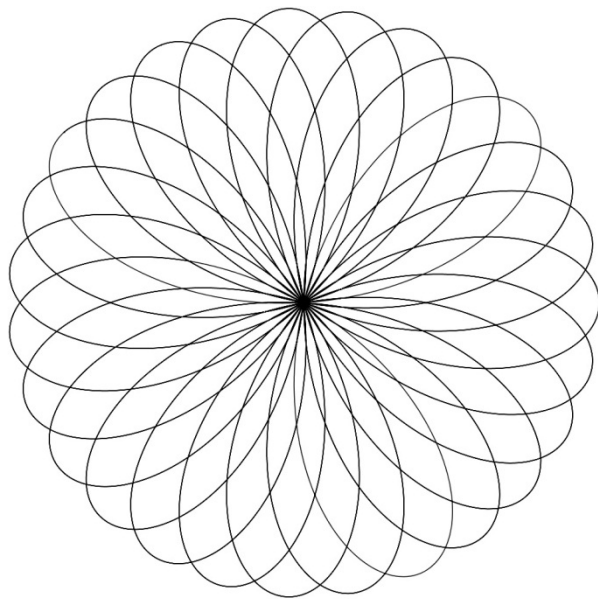
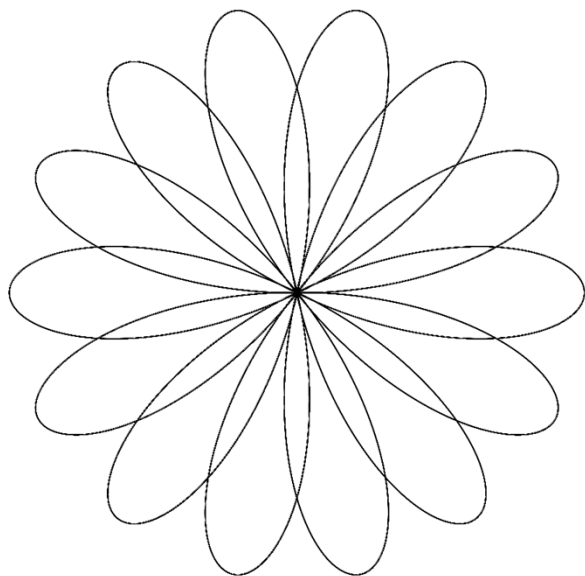


Convex of concaaf ?

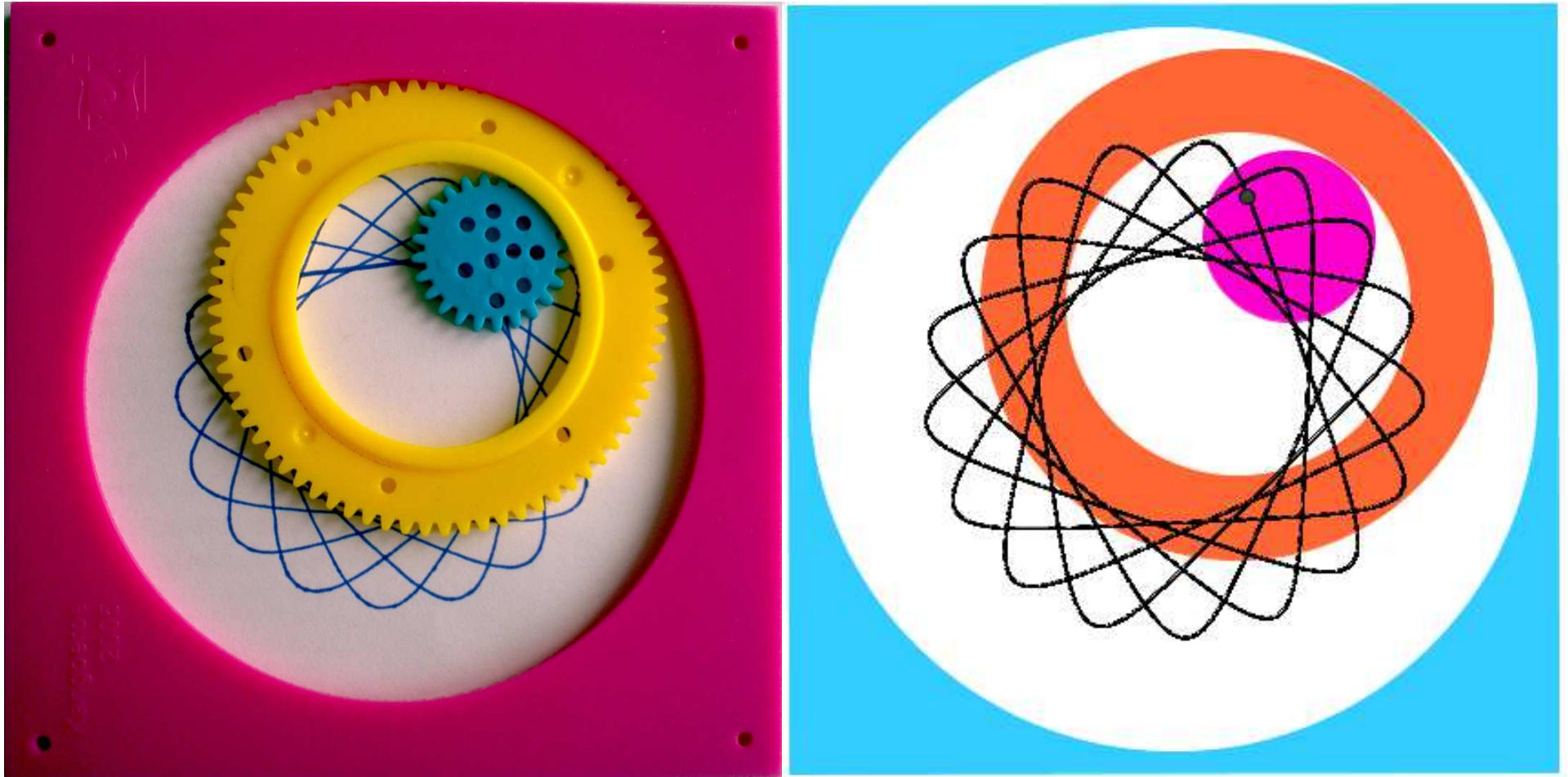


Idee: Leon van den Broek

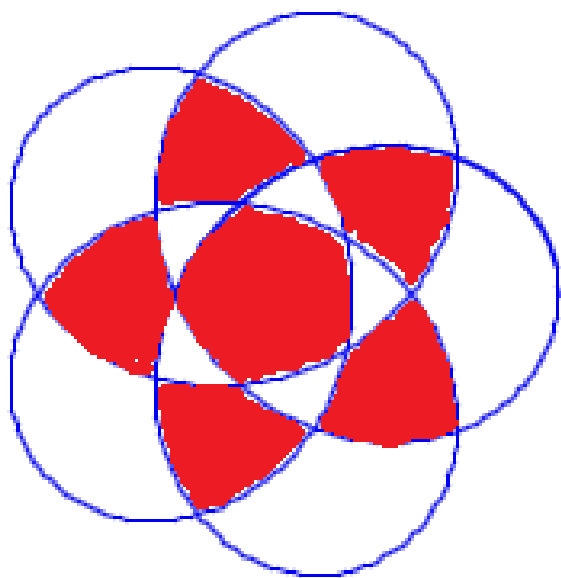
Rozenkrommen



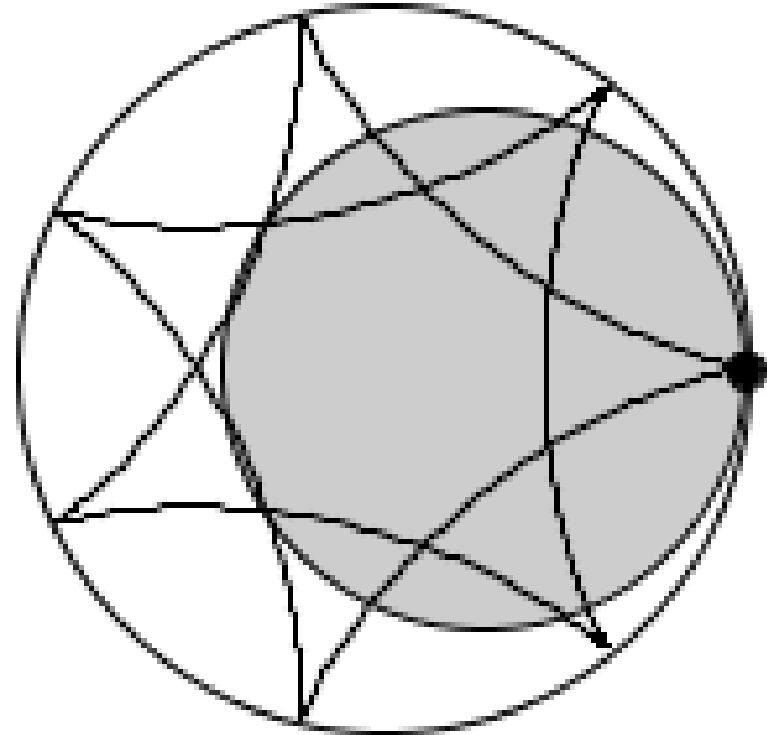
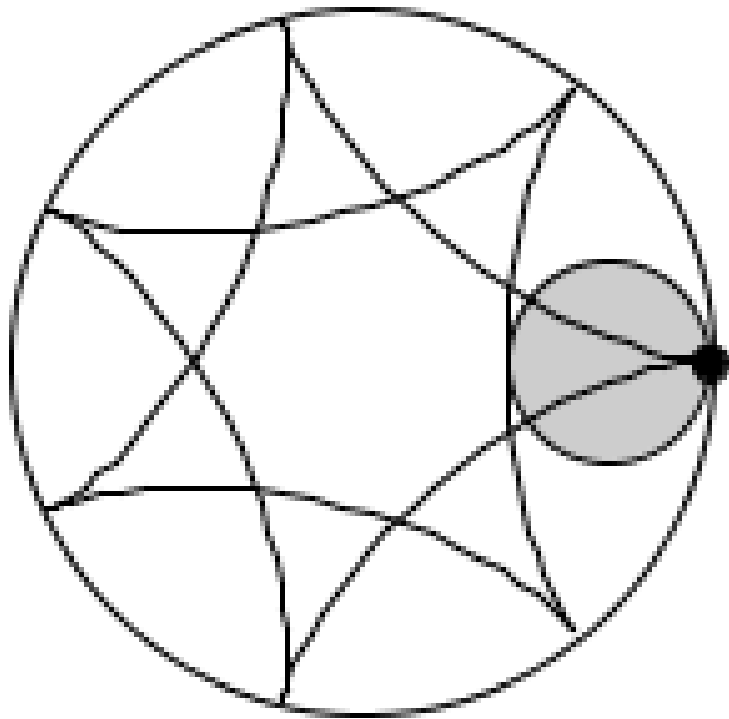
Trirograaf



Kleuren en kleurbaarheid



Two ways of drawing



Perspectiefwisseling: polhodie en
herpolhodie ontdekken

α: [2. Kön 25,17](#)

[23](#)Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum. [24](#)Und um das Meer gingen Knoten an seinem Rand ringsherum, je zehn auf eine Elle; es hatte zwei Reihen Knoten, die beim Guß mitgegossen waren. [25](#)Und es stand auf zwölf Rindern, von denen drei nach Norden gewandt waren, drei nach Westen, drei nach Süden und drei nach Osten, und das Meer stand obendrauf, und ihre Hinterteile waren alle nach innen gekehrt. [26](#)Die Wanddicke des Meeres aber war eine Hand breit, und sein Rand war wie der Rand eines Bechers, wie eine aufgegangene Lilie, und es gingen zweitausend Eimer hinein. [27](#)Er machte auch zehn Gestelle aus Kupfer, jedes vier Ellen lang und breit und drei Ellen hoch. [28](#)Es war aber das Gestell so gemacht, daß es Seiten hatte zwischen den Leisten. [29](#)Und an den Seiten zwischen den Leisten waren Löwen, Rinder und Cherubim, und ebenso auf den Leisten und oberhalb und unterhalb der Löwen und Rinder waren herabhängende Kränze. [30](#)Und jedes Gestell hatte vier kupferne Räder mit kupfernen Achsen. Und auf den vier Ecken waren Träger gegossen, jeder dem andern gegenüber, unten an den Kessel gegossen. [31](#)Aber der Hals mitten auf dem Gestell war eine Elle hoch und rund, anderthalb Ellen weit, und es waren Buckel an dem Hals in Feldern, die viereckig waren und nicht rund. [32](#)Die vier Räder aber waren unten an den Seiten, und die Achsen der Räder waren am Gestell. Jedes Rad war anderthalb Ellen hoch. [33](#)Es waren Räder wie Wagenräder, und ihre Achsen, Naben, Speichen und Felgen waren alle gegossen. [34](#)Und die vier Träger auf den vier Ecken eines jeden Gestells waren auch am Gestell. [35](#)Und oben auf dem Gestell, eine halbe Elle hoch, rundherum, waren Griffe und Leisten am Gestell. [36](#)Und er ließ auf die Flächen der Griffe und Leisten eingraben Cherubim, Löwen und Palmenbäume, soviel Platz auf jedem war, und Kränze ringsherum daran. [37](#)Auf diese Weise machte er zehn Gestelle, alle von einem Guß, einem Maß und einer Gestalt. [38](#)Und er machte zehn Kessel aus Kupfer, daß vierzig Eimer in einen Kessel gingen, und jeder war vier Ellen weit, und auf jedem Gestell war ein Kessel. [39](#)Und er stellte fünf Gestelle an die rechte Seite des Hauses und die andern fünf an die linke Seite; aber das Meer stellte er rechts vor das Haus nach Süden hin. [40](#)Und Hiram machte auch Töpfe, Schaufeln, Becken; und so vollendete er alle Werke, die der König Salomo am Hause des HERRN machen ließ: [41](#)die zwei Säulen und die kugligen Knäufe oben auf den zwei Säulen und die zwei Gitterwerke, die die beiden kugligen Knäufe auf den Säulen bedecken sollten, [42](#)und die vierhundert Granatäpfel an den zwei Gitterwerken, je zwei Reihen Granatäpfel an einem Gitterwerk, die die beiden kugligen Knäufe auf den Säulen bedecken sollten, [43](#)dazu die zehn Gestelle und zehn Kessel obendrauf [44](#)und das Meer und die zwölf Rinder unter dem Meer [45](#)und die Töpfe, Schaufeln und Becken. Und alle diese Geräte, die Hiram dem König Salomo machte für das Haus des HERRN, waren von blankem Kupfer. [46](#)In der Gegend des unteren Jordans ließ sie der König gießen in der Gießerei von Adama zwischen Sukkot und Zaretan. [47](#)Und Salomo ließ alle Geräte ungewogen wegen der sehr großen Menge des Kupfers. [48](#)Auch ließ Salomo alles Gerät machen, das zum Hause des HERRN gehörte: den goldenen Altar, den goldenen Tisch, auf dem die Schaubrote liegen, [49](#)fünf Leuchter zur rechten Hand und fünf Leuchter zur linken vor dem Chorraum von lauterem Gold, mit goldenen Blumen, Lampen und Lichtscheren; [50](#)dazu Schalen, Messer, Becken, Löffel und Pfannen von lauterem Gold. Auch waren die Angeln an den Türen zum Allerheiligsten innen im Hause und an den Türen der Tempelhalle von Gold. [51](#)So wurde das ganze Werk vollendet, das der König Salomo gemacht hatte am Hause des HERRN. Und Salomo brachte hinein, was sein Vater David geheiligt hatte an Silber und Gold und Geräten, und legte es in den Schatz des Hauses des HERRN.

[23](#)Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum. [24](#)Und um das Meer gingen Knoten an seinem Rand ringsherum, je zehn auf eine Elle; es hatte zwei Reihen Knoten, die beim Guß mitgegossen waren. [25](#)Und es stand auf zwölf Rindern, von denen drei nach Norden gewandt waren, drei nach Westen, drei nach Süden und drei nach Osten, und das Meer stand obendrauf, und ihre Hinterteile waren alle nach innen gekehrt. [26](#)Die Wanddicke des Meeres aber war eine Hand breit, und sein Rand war wie der Rand eines Bechers, wie eine aufgegangene Lilie, und es gingen zweitausend Eimer hinein. [27](#)Er machte auch zehn Gestelle aus Kupfer, jedes vier Ellen lang und breit und drei Ellen hoch. [28](#)Es war aber das Gestell so gemacht, daß es Seiten hatte zwischen den Leisten. [29](#)Und an den Seiten zwischen den Leisten waren Löwen, Rinder und Cherubim, und ebenso auf den Leisten und oberhalb und unterhalb der Löwen und Rinder waren herabhängende Kränze. [30](#)Und jedes Gestell hatte vier kupferne Räder mit kupfernen Achsen. Und auf den vier Ecken waren Träger gegossen, jeder dem andern gegenüber, unten an den Kessel gegossen. [31](#)Aber der Hals mitten auf dem Gestell war eine Elle hoch und rund, anderthalb Ellen weit, und es waren Buckel an dem Hals in Feldern, die viereckig waren und nicht rund. [32](#)Die vier Räder aber waren unten an den Seiten, und die Achsen der Räder waren am Gestell. Jedes Rad war anderthalb Ellen hoch. [33](#)Es waren Räder wie Wagenräder, und ihre Achsen, Naben, Speichen und Felgen waren alle gegossen. [34](#)Und die vier Träger auf den vier Ecken eines jeden Gestells waren auch am Gestell. [35](#)Und oben auf dem Gestell, eine halbe Elle hoch, rundherum, waren Griffe und Leisten am Gestell. [36](#)Und er ließ auf die Flächen der Griffe und Leisten eingraben Cherubim, Löwen und Palmenbäume, soviel Platz auf jedem war, und Kränze ringsherum daran. [37](#)Auf diese Weise machte er zehn Gestelle, alle von einem Guß, einem Maß und einer Gestalt. [38](#)Und er machte zehn Kessel aus Kupfer, daß vierzig Eimer in einen Kessel gingen, und jeder war vier Ellen weit, und auf jedem Gestell war ein Kessel. [39](#)Und er stellte fünf Gestelle an die rechte Seite des Hauses und die andern fünf an die linke Seite; aber das Meer stellte er rechts vor das Haus nach Süden hin. [40](#)Und Hiram machte auch Töpfe, Schaufeln, Becken; und so vollendete er alle Werke, die der König Salomo am Hause des HERRN machen ließ: [41](#)die zwei Säulen und die kugligen Knäufe oben auf den zwei Säulen und die zwei Gitterwerke, die die beiden kugligen Knäufe auf den Säulen bedecken sollten, [42](#)und die vierhundert Granatäpfel an den zwei Gitterwerken, je zwei Reihen Granatäpfel an einem Gitterwerk, die die beiden kugligen Knäufe auf den Säulen bedecken sollten, [43](#)dazu die zehn Gestelle und zehn Kessel obendrauf [44](#)und das Meer und die zwölf Rinder unter dem Meer [45](#)und die Töpfe, Schaufeln und Becken. Und alle diese Geräte, die Hiram dem König Salomo machte für das Haus des HERRN, waren von blankem Kupfer. [46](#)In der Gegend des unteren Jordans ließ sie der König gießen in der Gießerei von Adama zwischen Sukkot und Zaretan. [47](#)Und Salomo ließ alle Geräte ungewogen wegen der sehr großen Menge des Kupfers. [48](#)Auch ließ Salomo alles Gerät machen, das zum Hause des HERRN gehörte: den goldenen Altar, den goldenen Tisch, auf dem die Schaubrote liegen, [49](#)fünf Leuchter zur rechten Hand und fünf Leuchter zur linken vor dem Chorraum von lauterem Gold, mit goldenen Blumen, Lampen und Lichtscheren; [50](#)dazu Schalen, Messer, Becken, Löffel und Pfannen von lauterem Gold. Auch waren die Angeln an den Türen zum Allerheiligsten innen im Hause und an den Türen der Tempelhalle von Gold. [51](#)So wurde das ganze Werk vollendet, das der König Salomo gemacht hatte am Hause des HERRN. Und Salomo brachte hinein, was sein Vater David geheiligt hatte an Silber und Gold und Geräten, und legte es in den Schatz des Hauses des HERRN.

De pol van de beweging

a: 2. Kön 25,17

[illegible]

De pol van de beweging

q: 2. Kön 25,17

[illegible]

De pol van de beweging

~~2. Kön 25,17~~

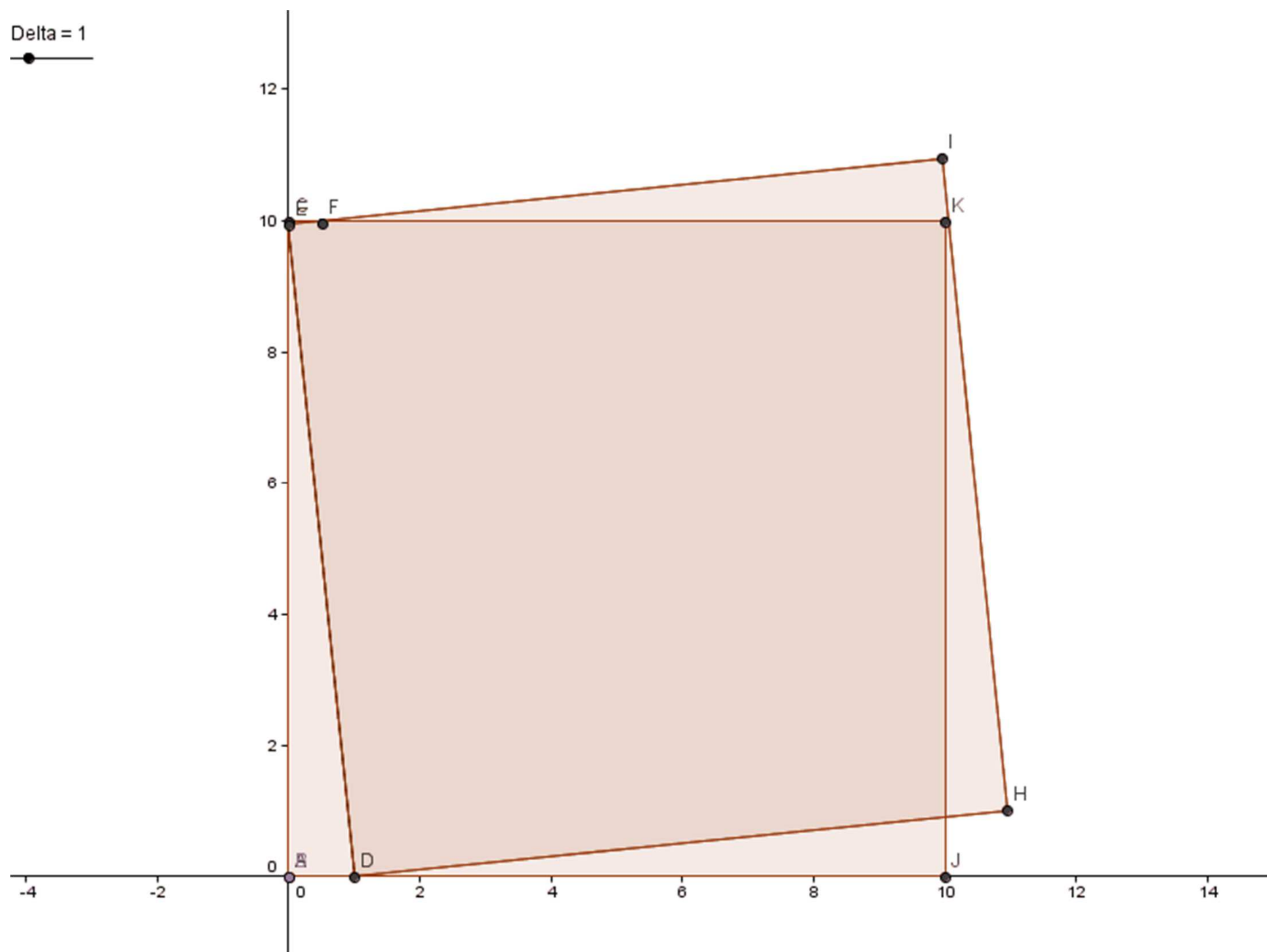
[illegible]

Geräten, und legte es in den Schatz des Hauses des HERRN.

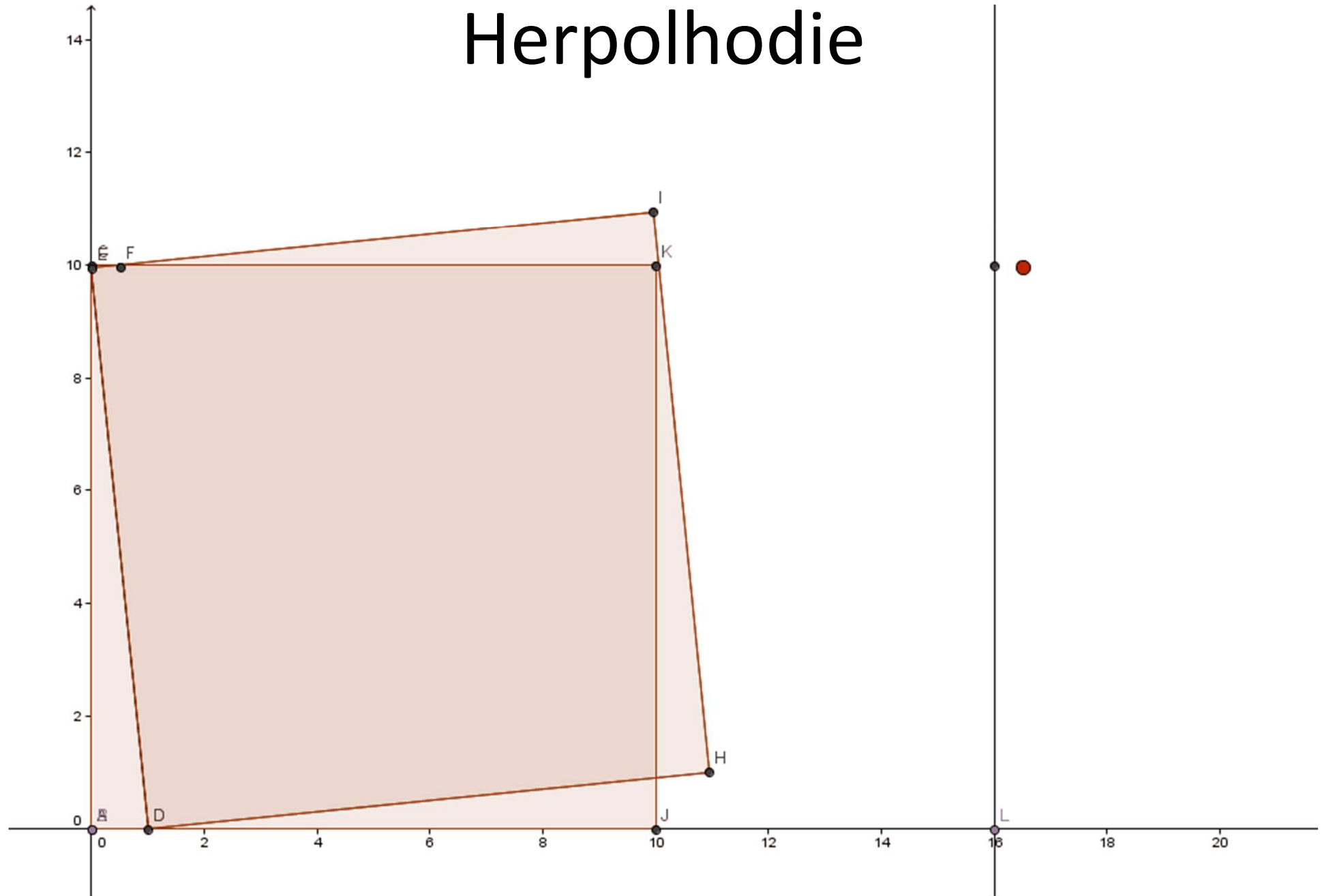
Opgave: Perspectiefwisseling door polhodie en herpolhodie

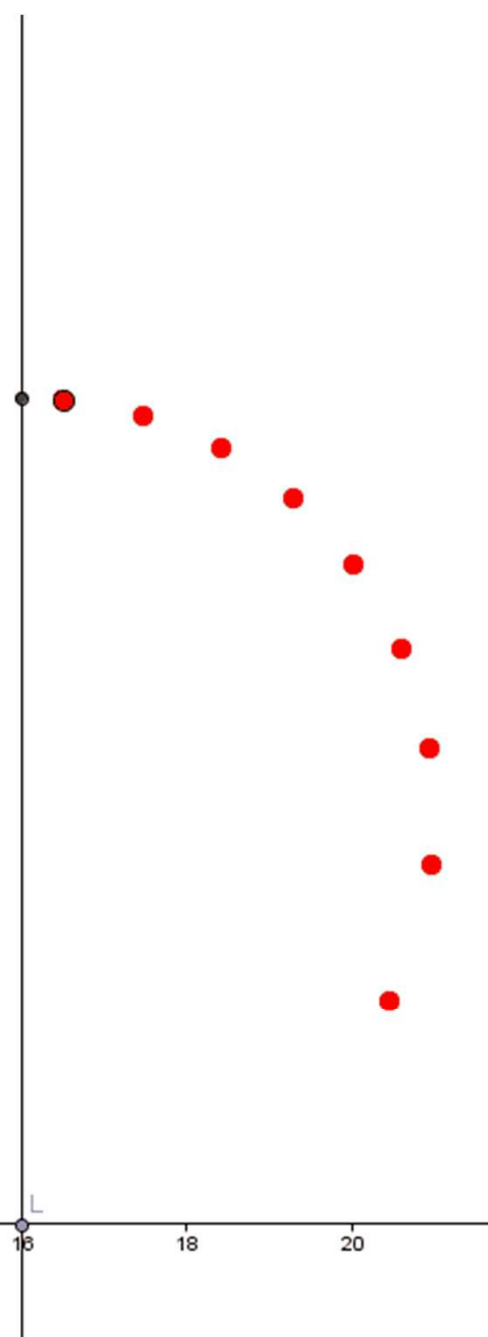
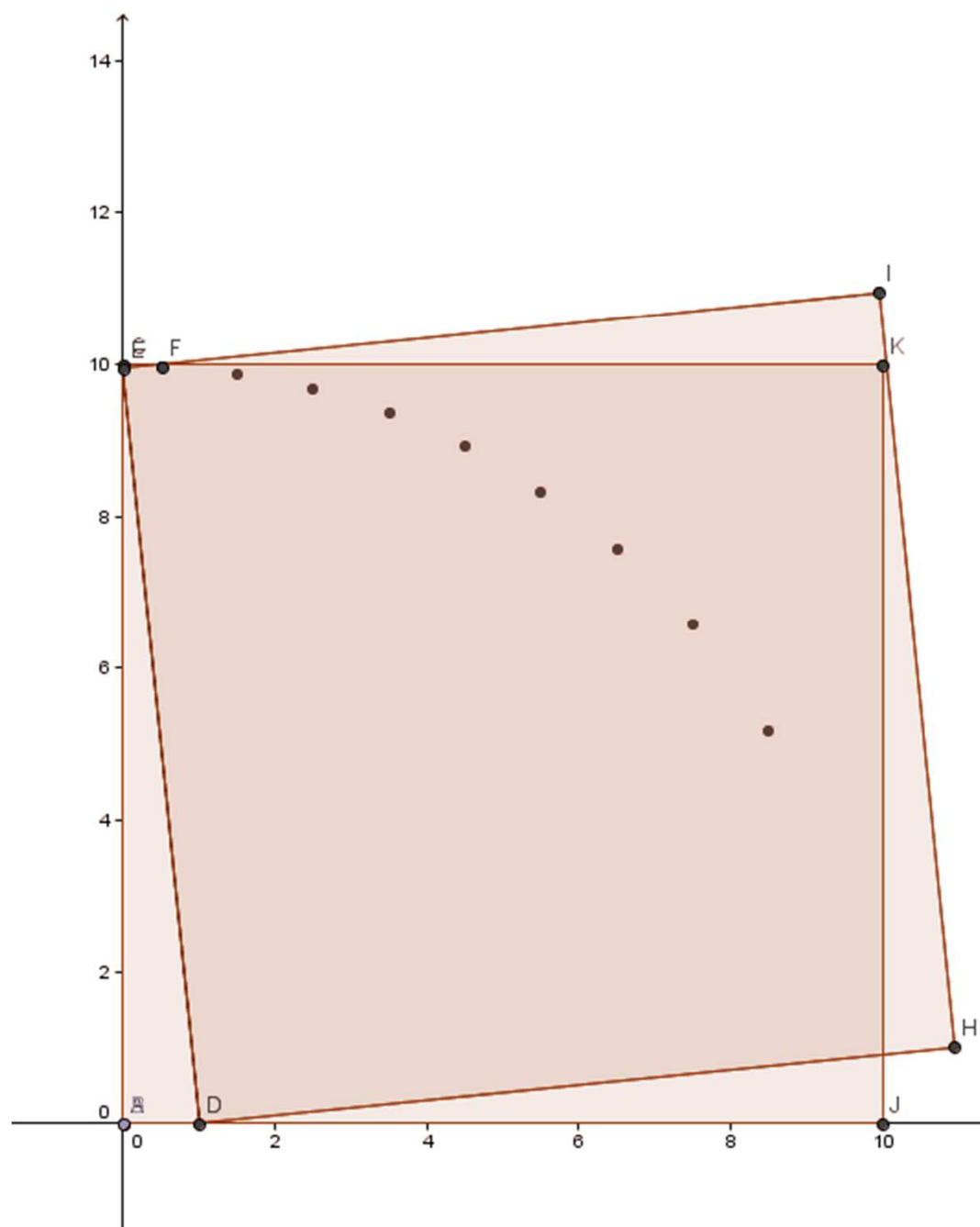
- a) Knipt u het bijgevoegde werkblad langs de gestippelde lijn in tweeën. Wij onderzoeken nu de diskrete beweging, die ontstaat als het punt A van het bovenste blaadje één voor één op de punten met gehele coördinaten op de x-as van het blaadje onder komt te liggen terwijl het punt B over de y-as van dat coördinatenstelsel onder schuift.
- b) Markeert u telkens bij elke overgang waarbij het punt A van $(k, 0)$ naar $(k+1, 0)$ wordt geschoven de pol van die beweging (d.w.z. het centrum van de draaing) door op beide blaadjes een stipje neer te zetten.
- c) Welke patronen ontstaan er op beide blaadjes en hoe kunt u vanuit die patronen de beweging van de blaadjes op elkaar herconstrueren.
- d) Heeft u een vermoeden erover hoe de polhodie en de herpolhodie er in dit geval uitzien? Kunt u dit wellicht bewijzen?
- e) Nu bekijken we de beweging van een spirograaf als een beweging van één vlak op een ander, waarbij die vlakken aan de schijven vast zijn verbonden. Hoe zien er dan de *polhodie* en *herpolhodie* uit?

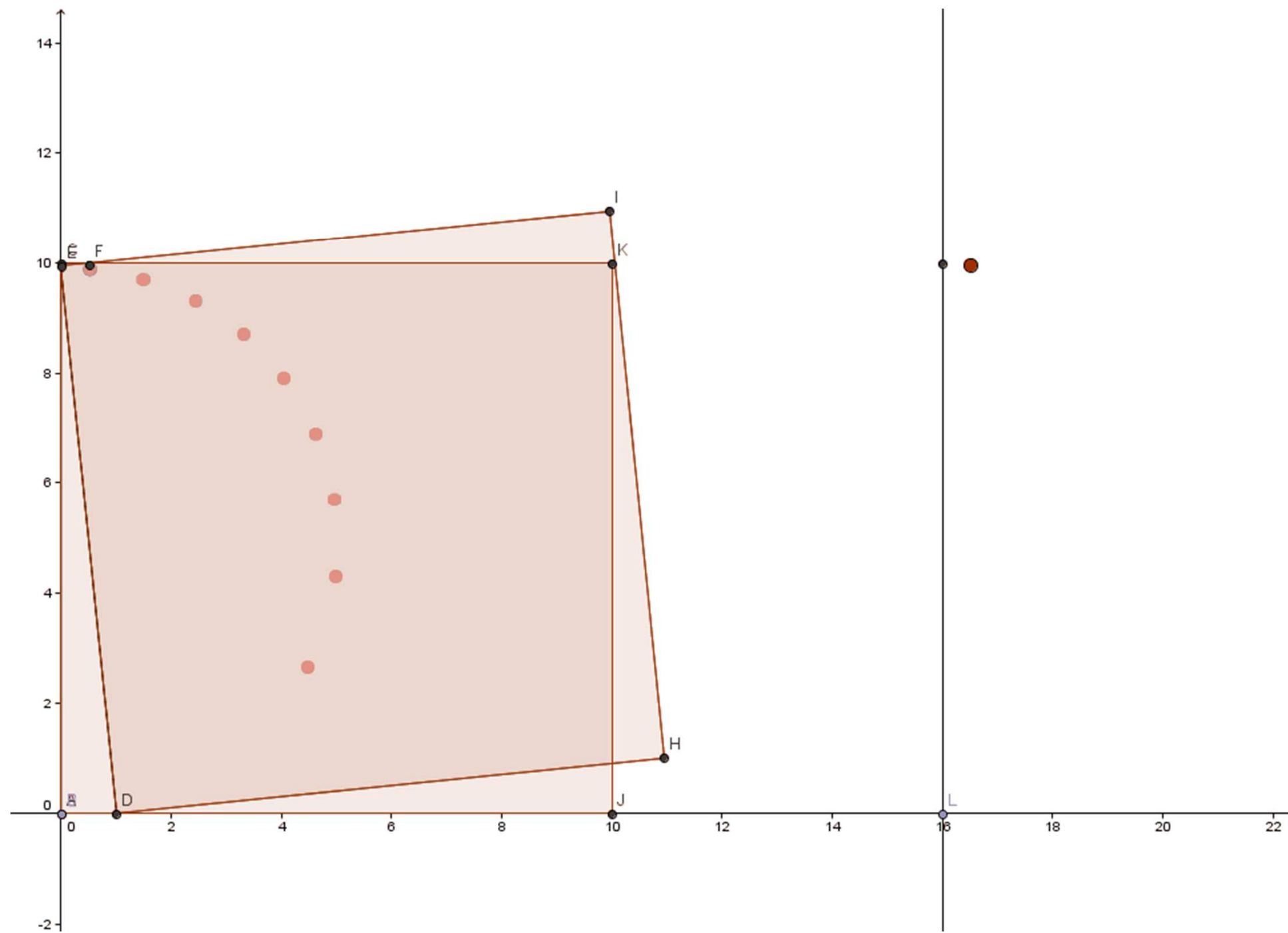
Delta = 1

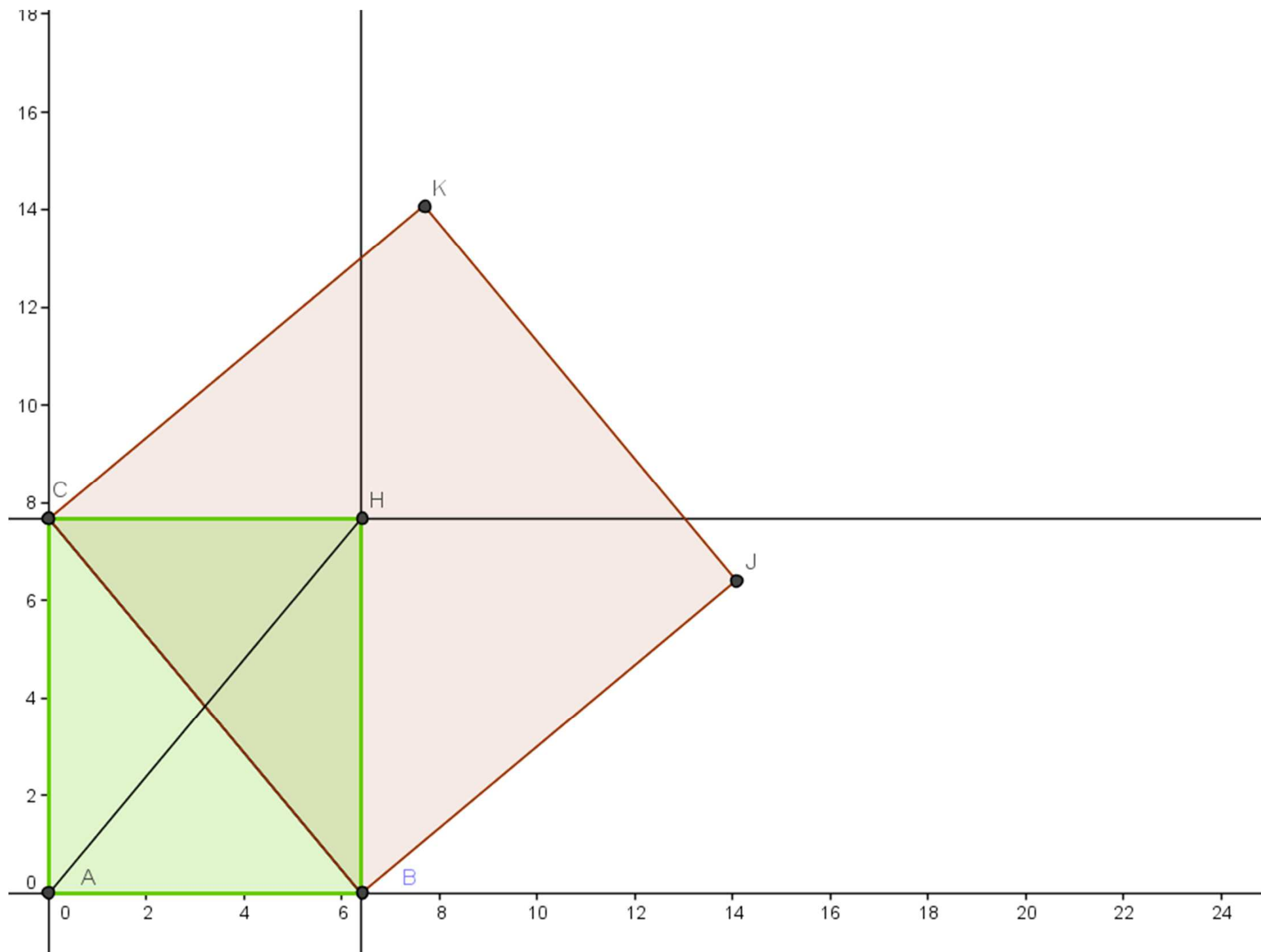


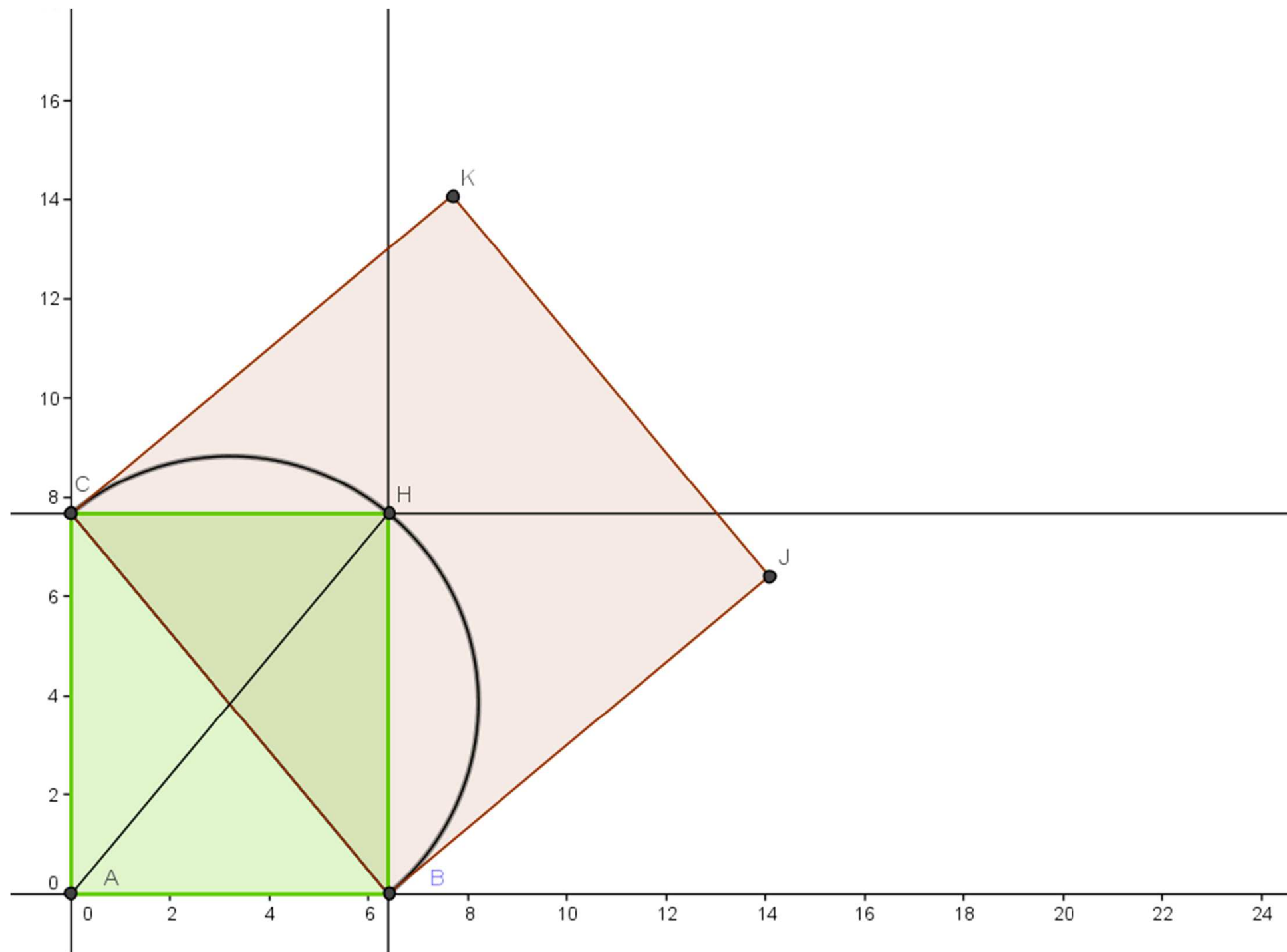
Herpolhodie

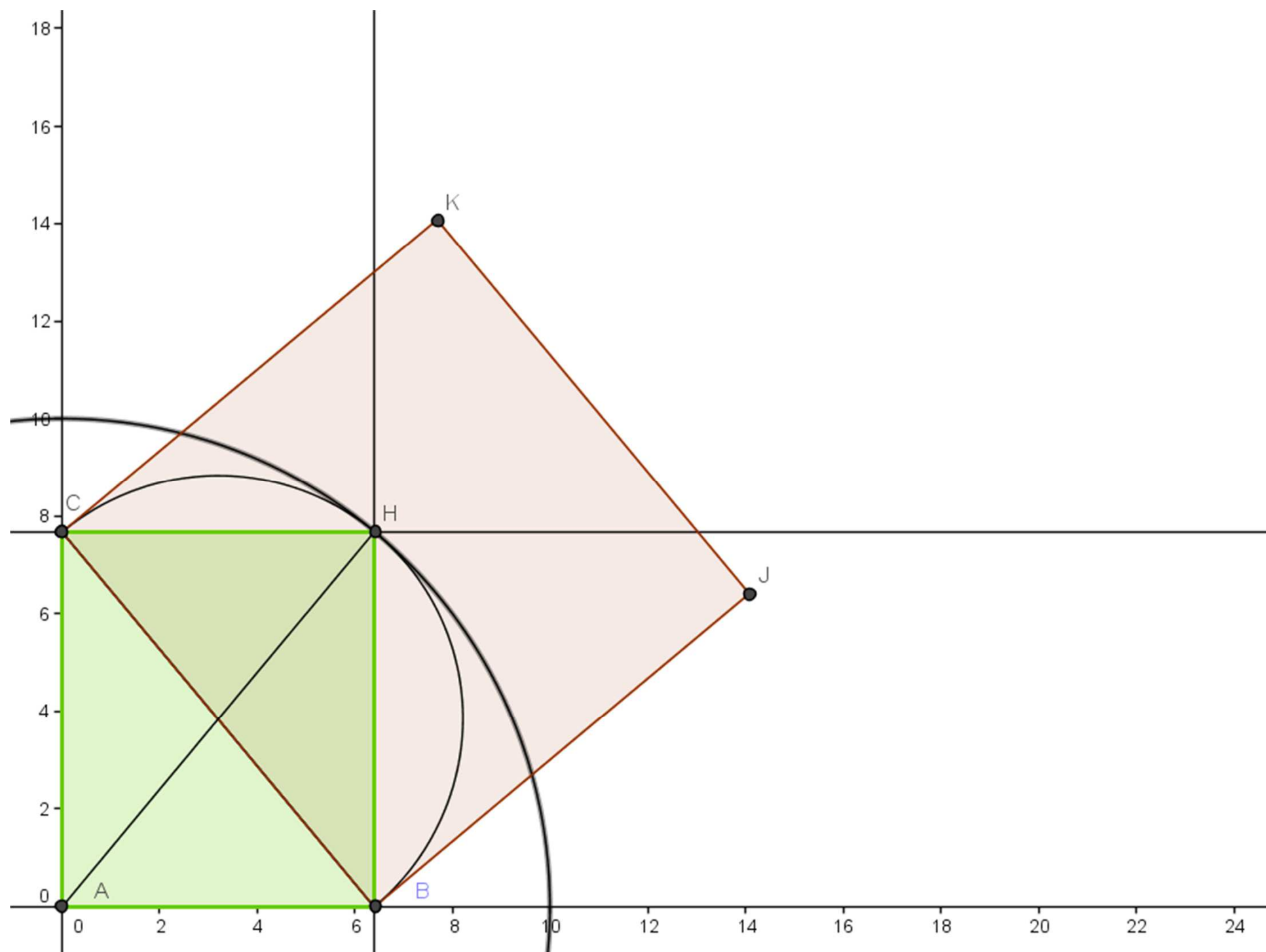


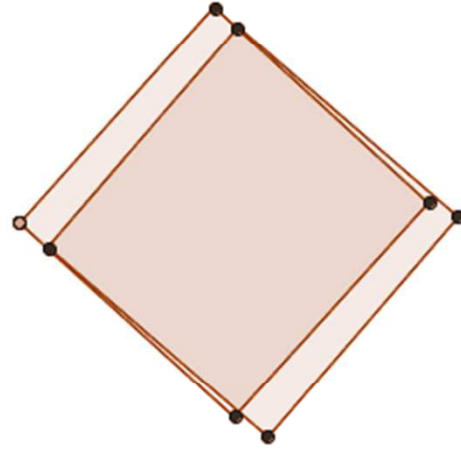
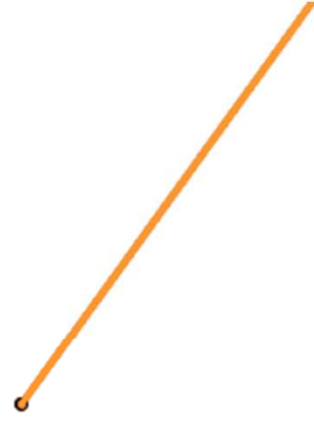


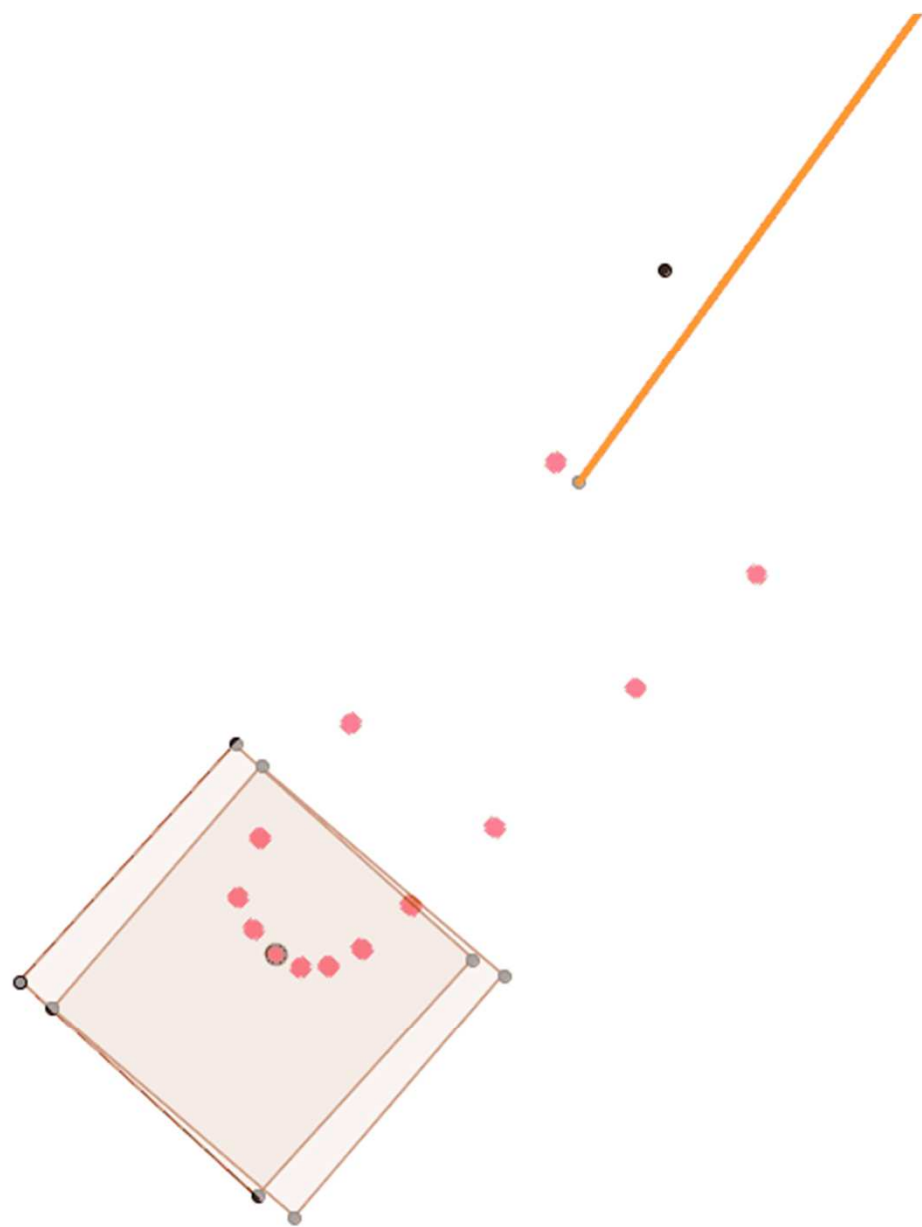


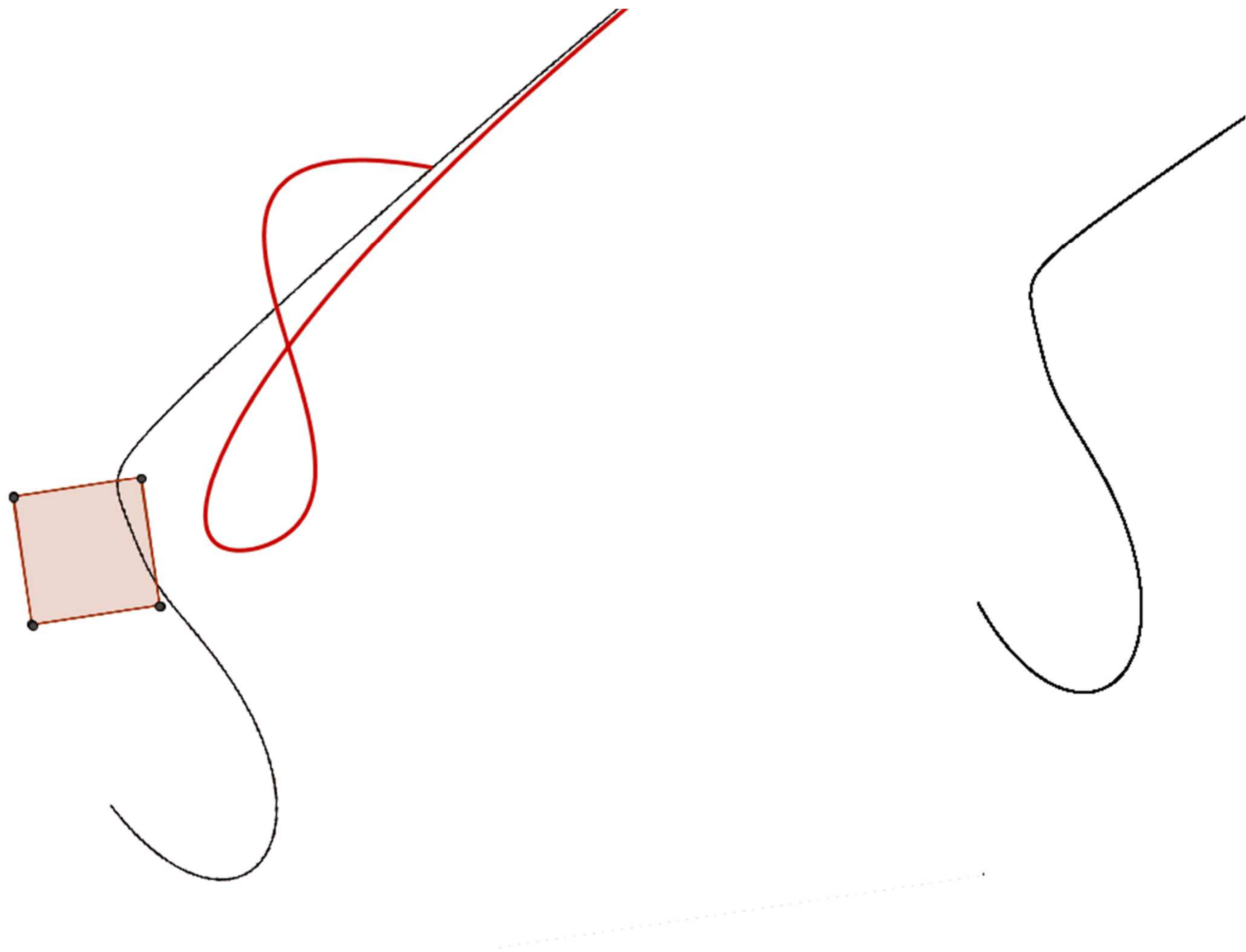


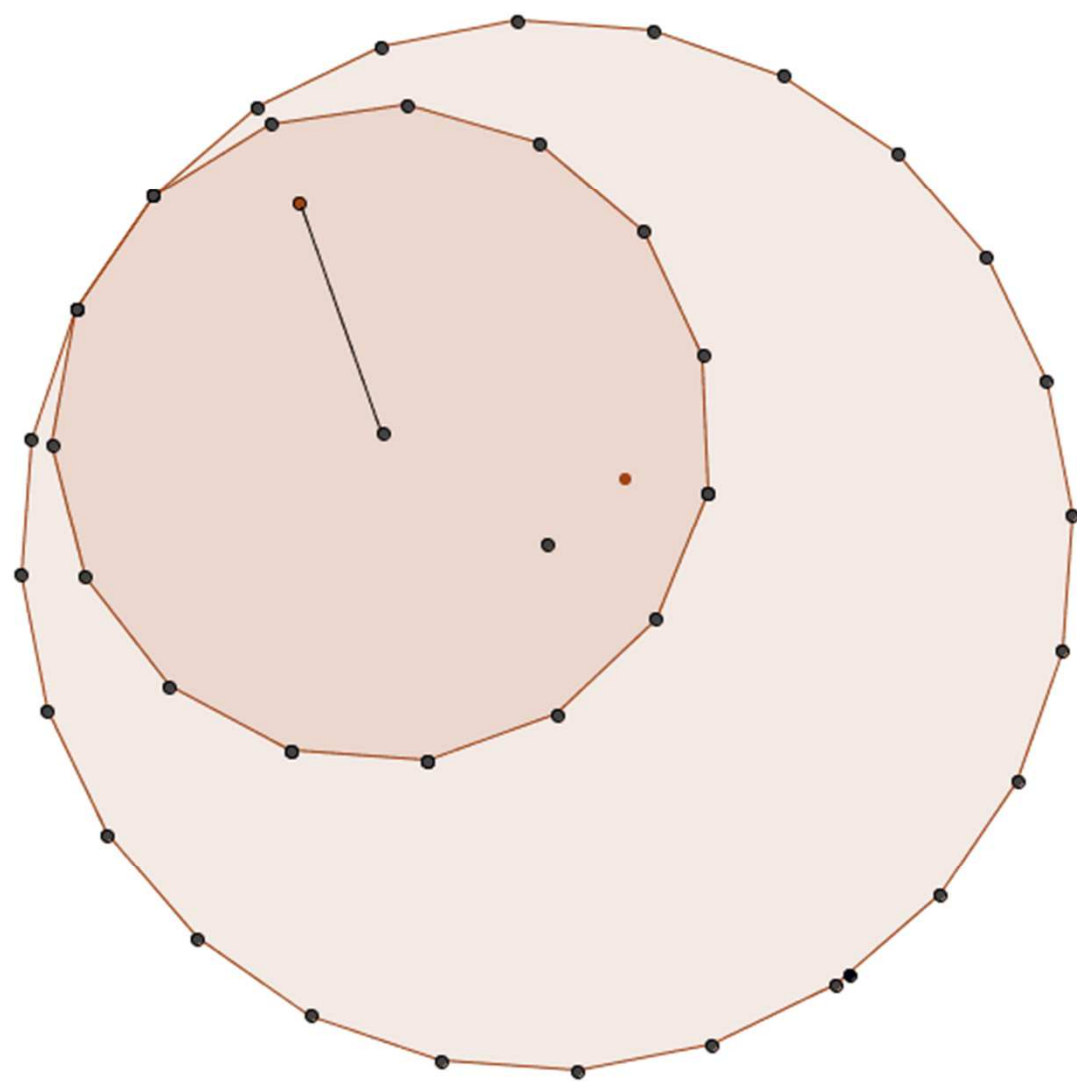


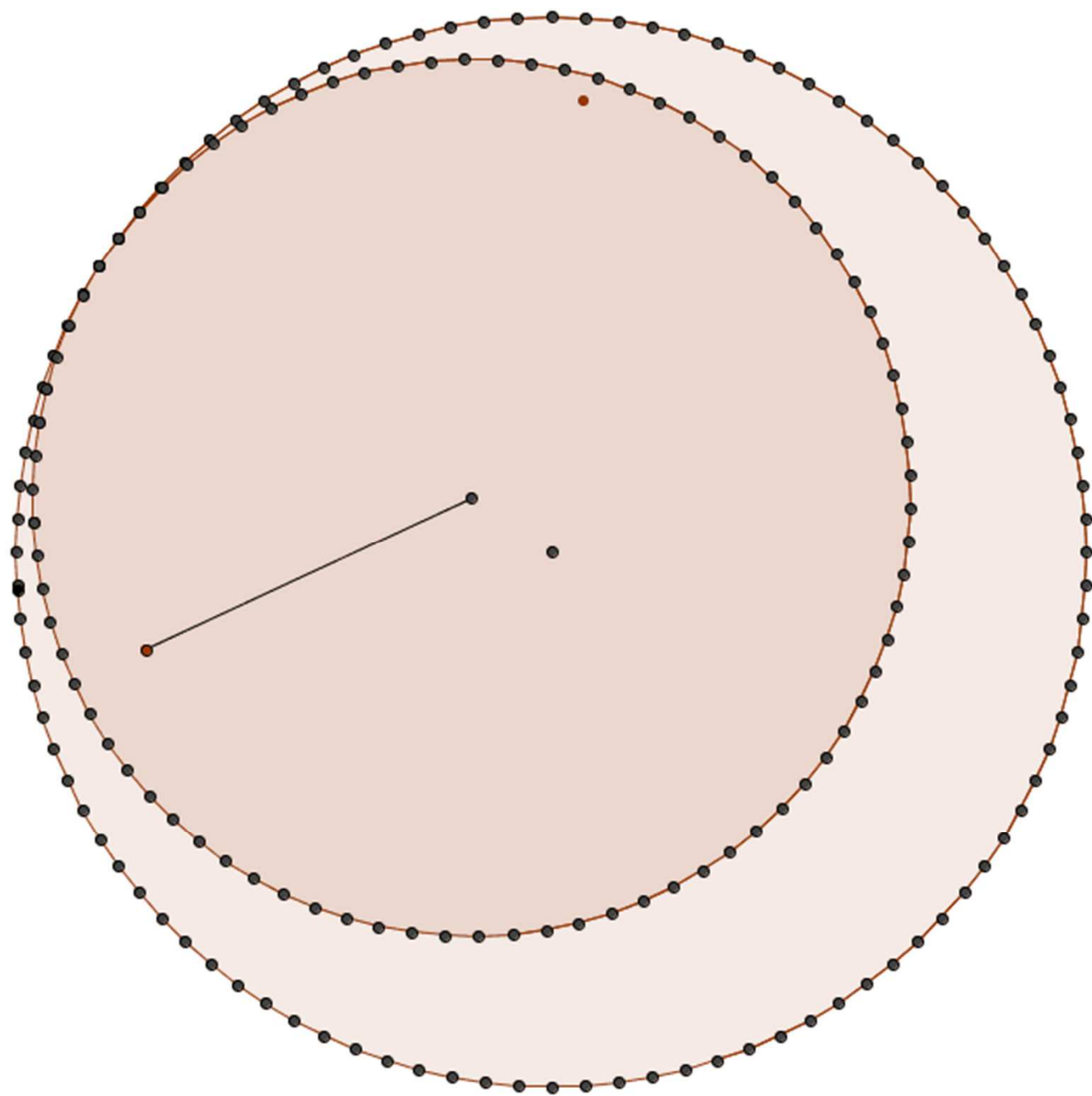








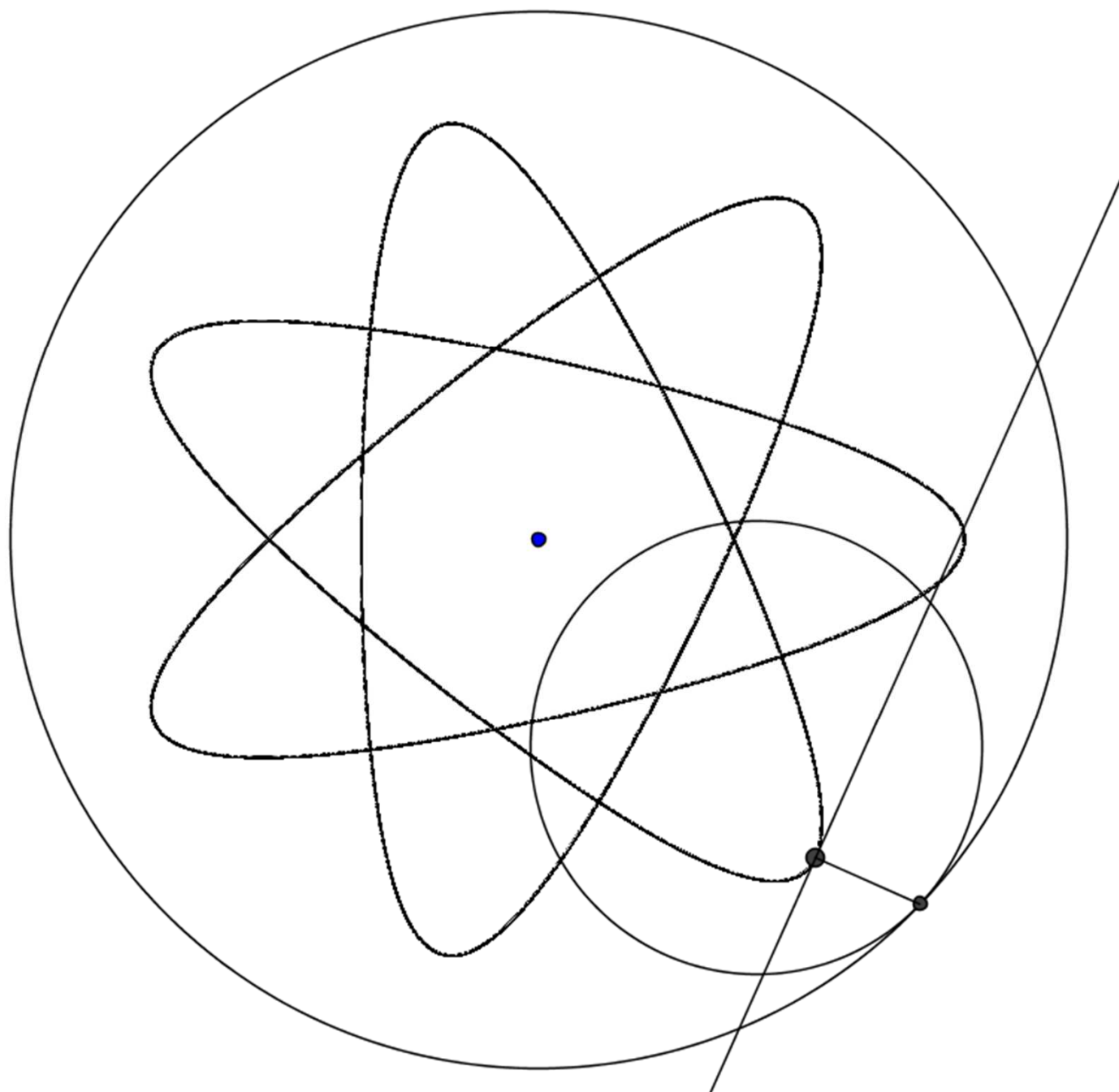




Raaklijn

Hoe construeer je vanuit het raakpunt van de twee schijven de raaklijn aan een spirografenkromme in een gegeven punt?

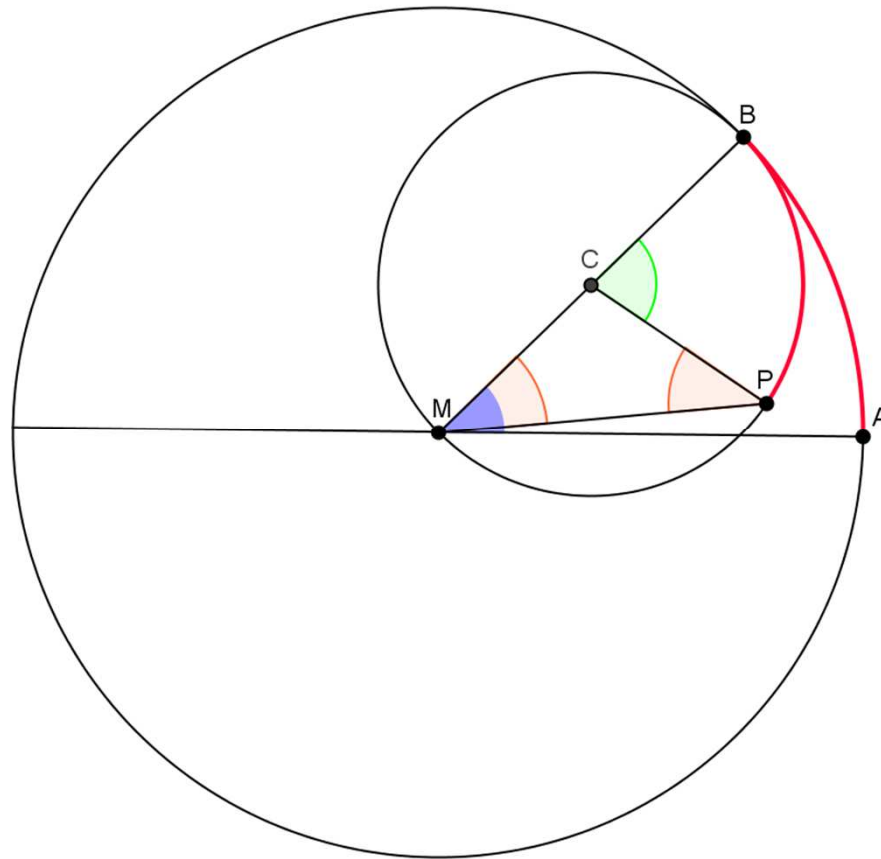
Doe een gok!



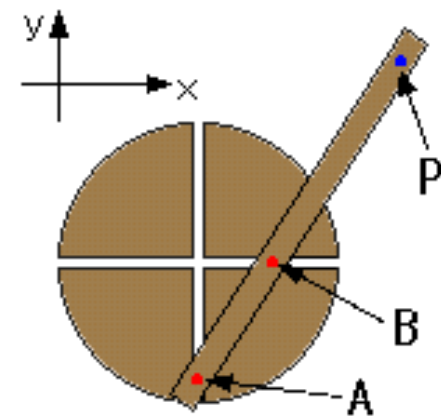
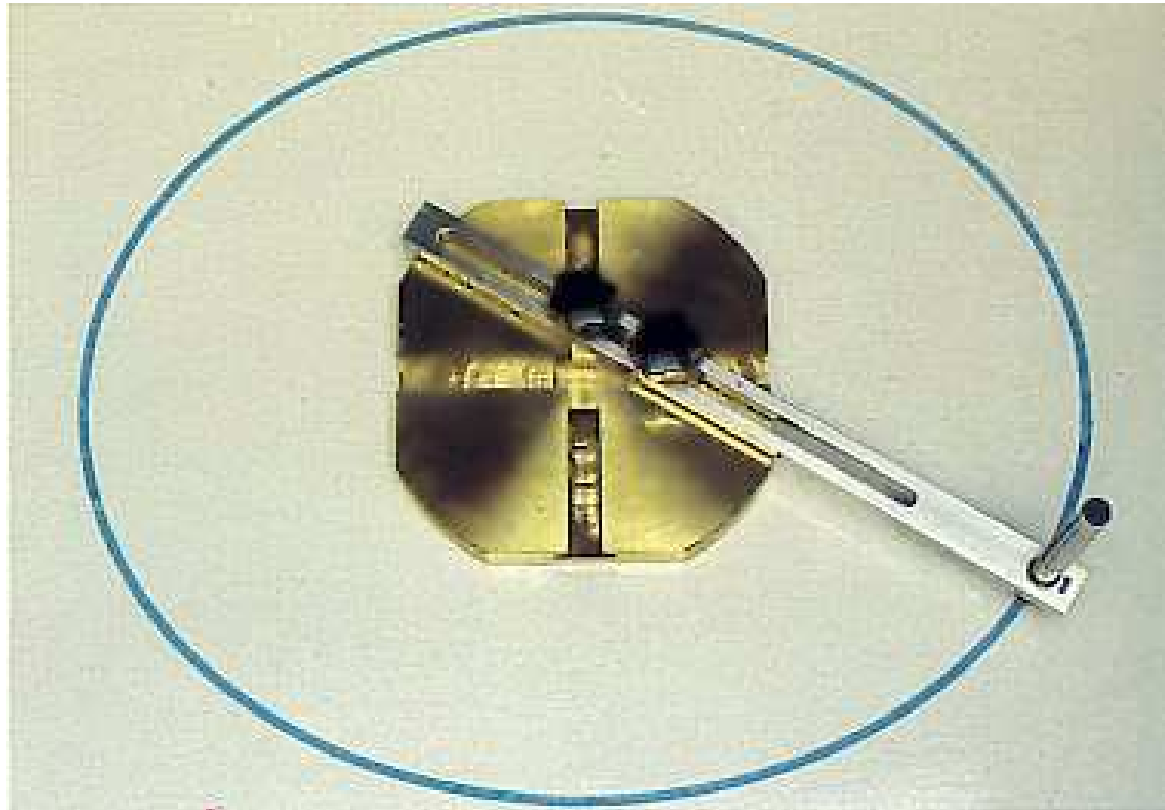
Meetkunde aan de spirograaf

Een rechte lijn tekenen!

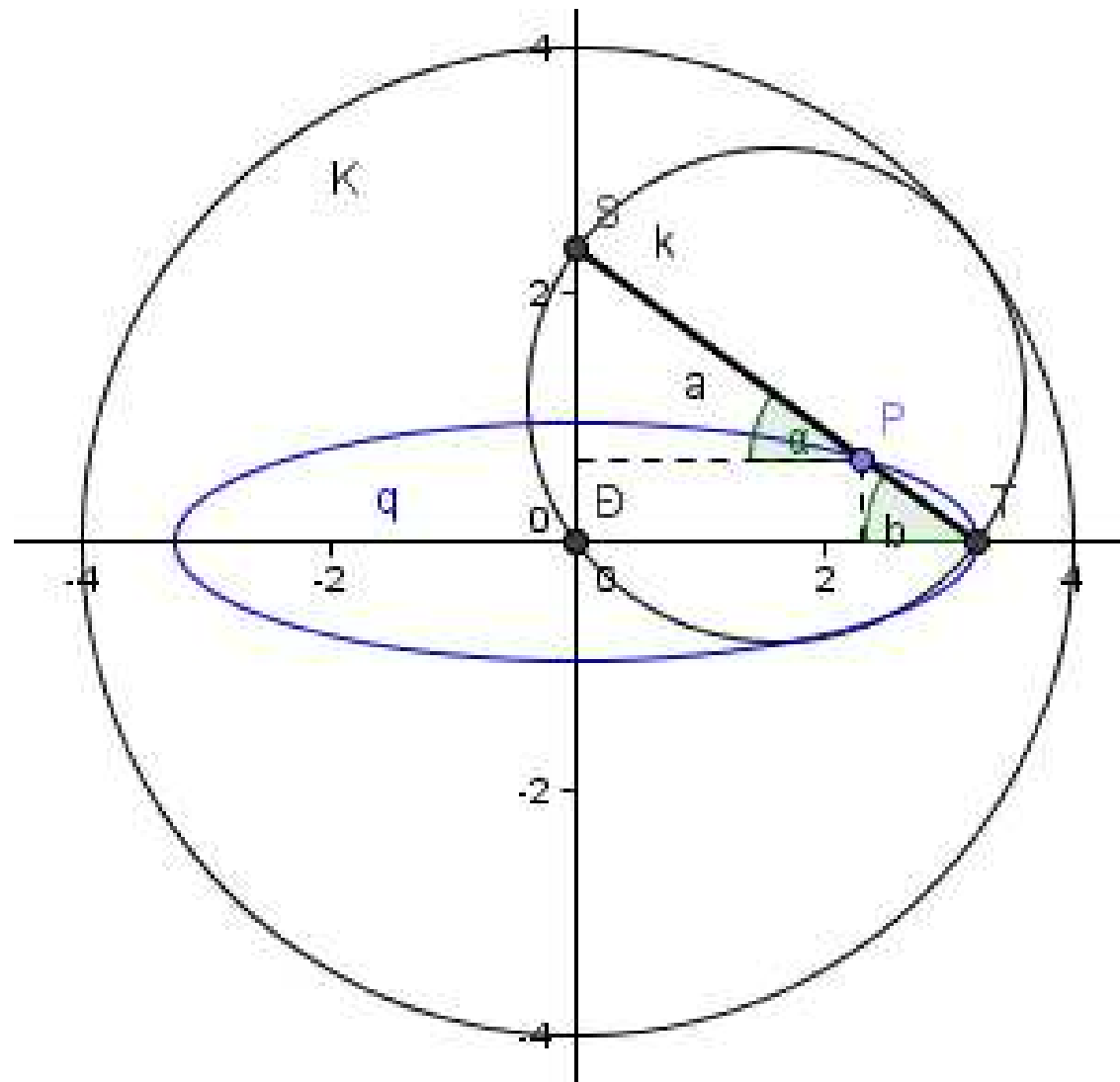
$$R = 2r$$



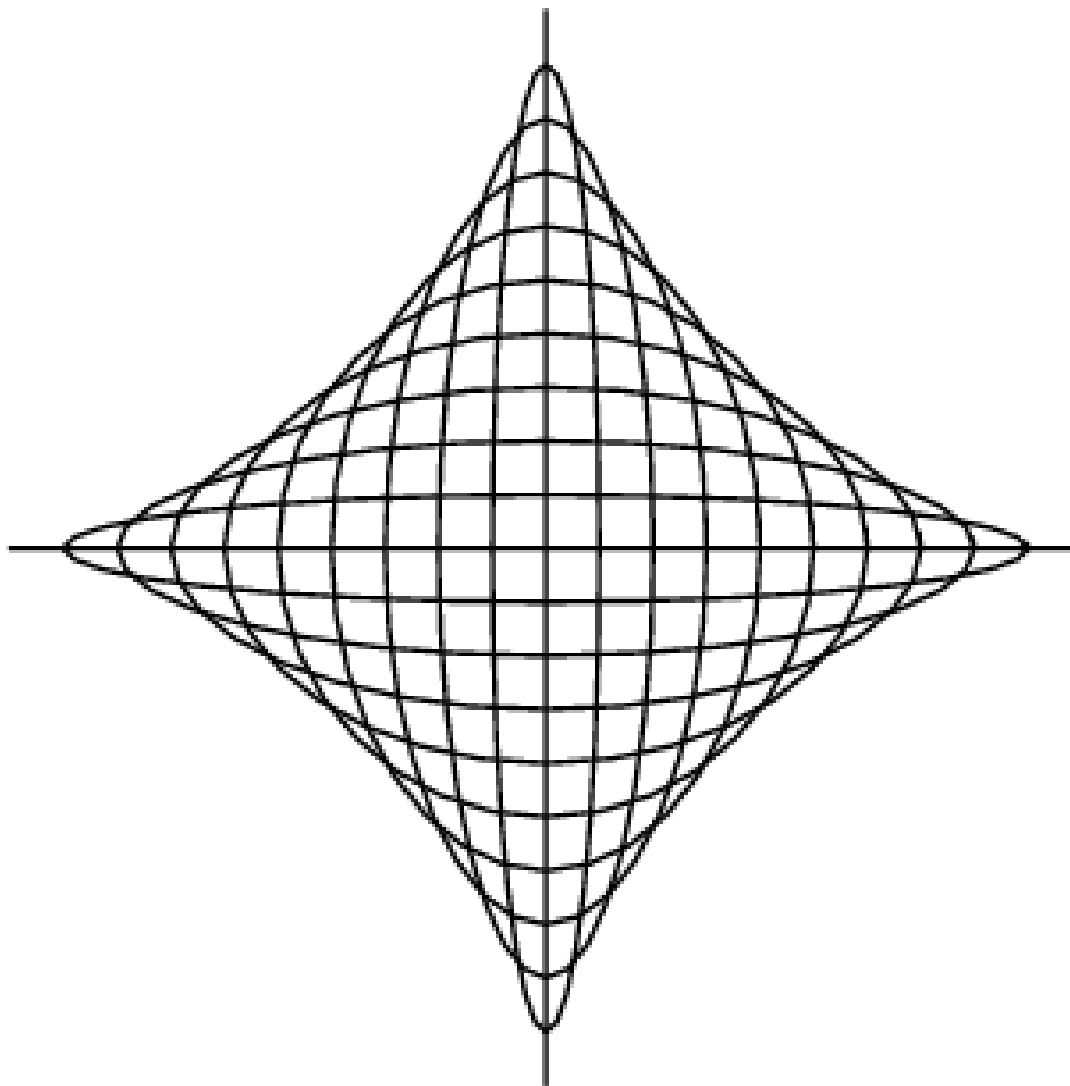
Ellipsograaf



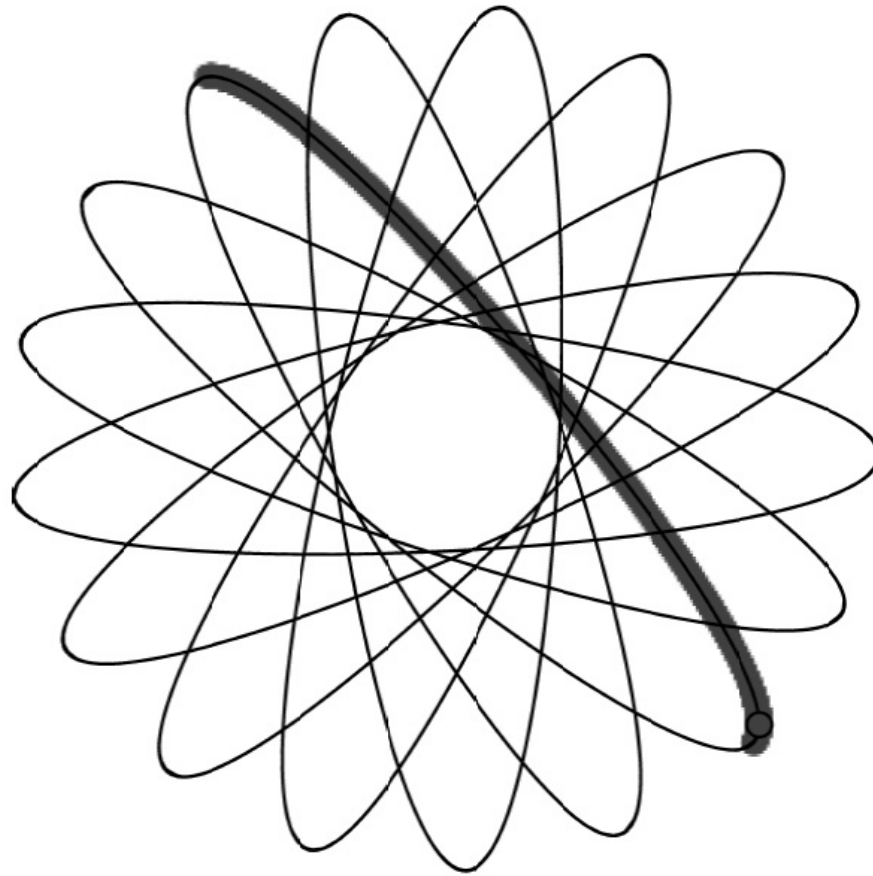
Ellipsograaf



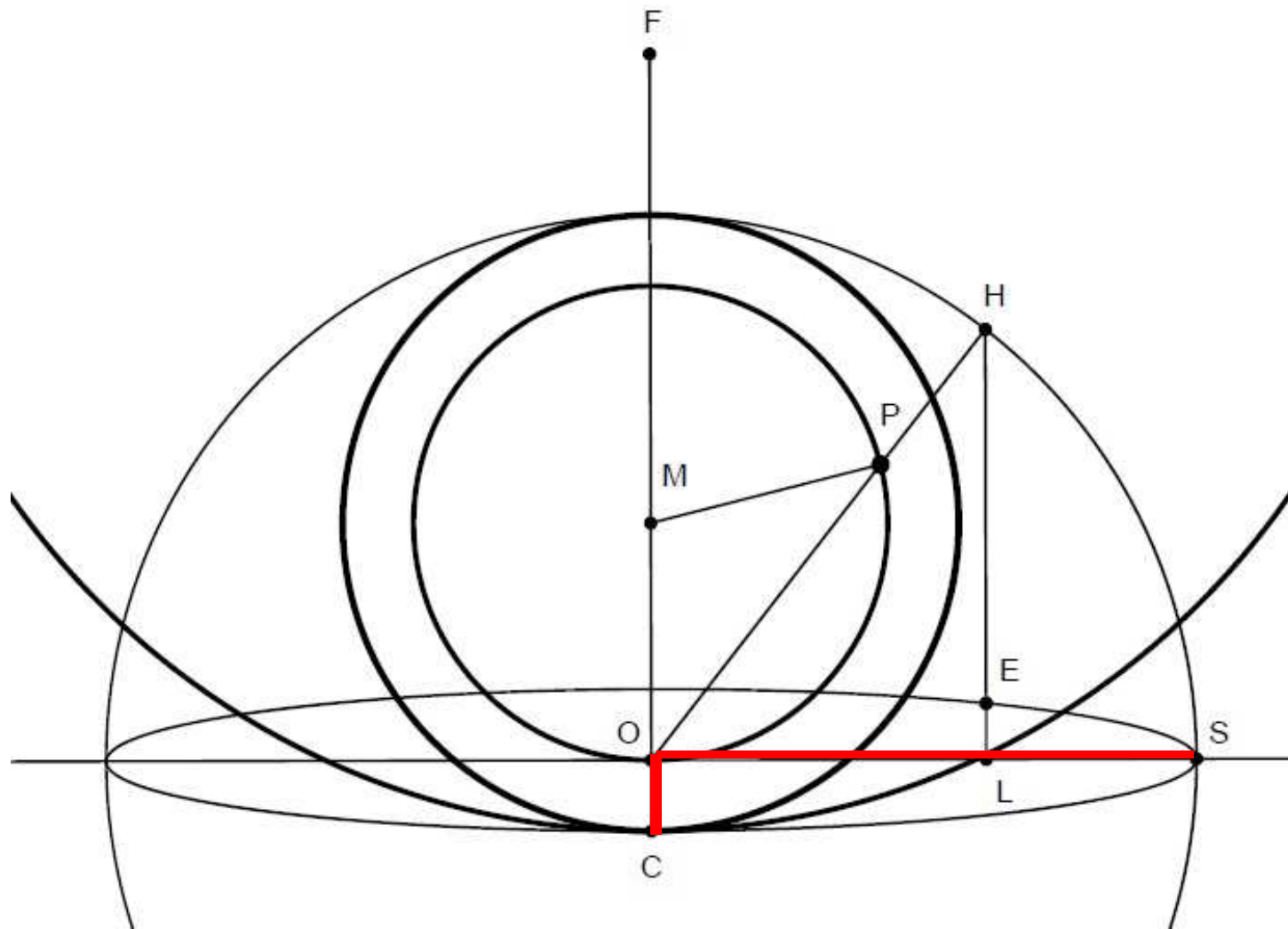
Astroide als hulkromme

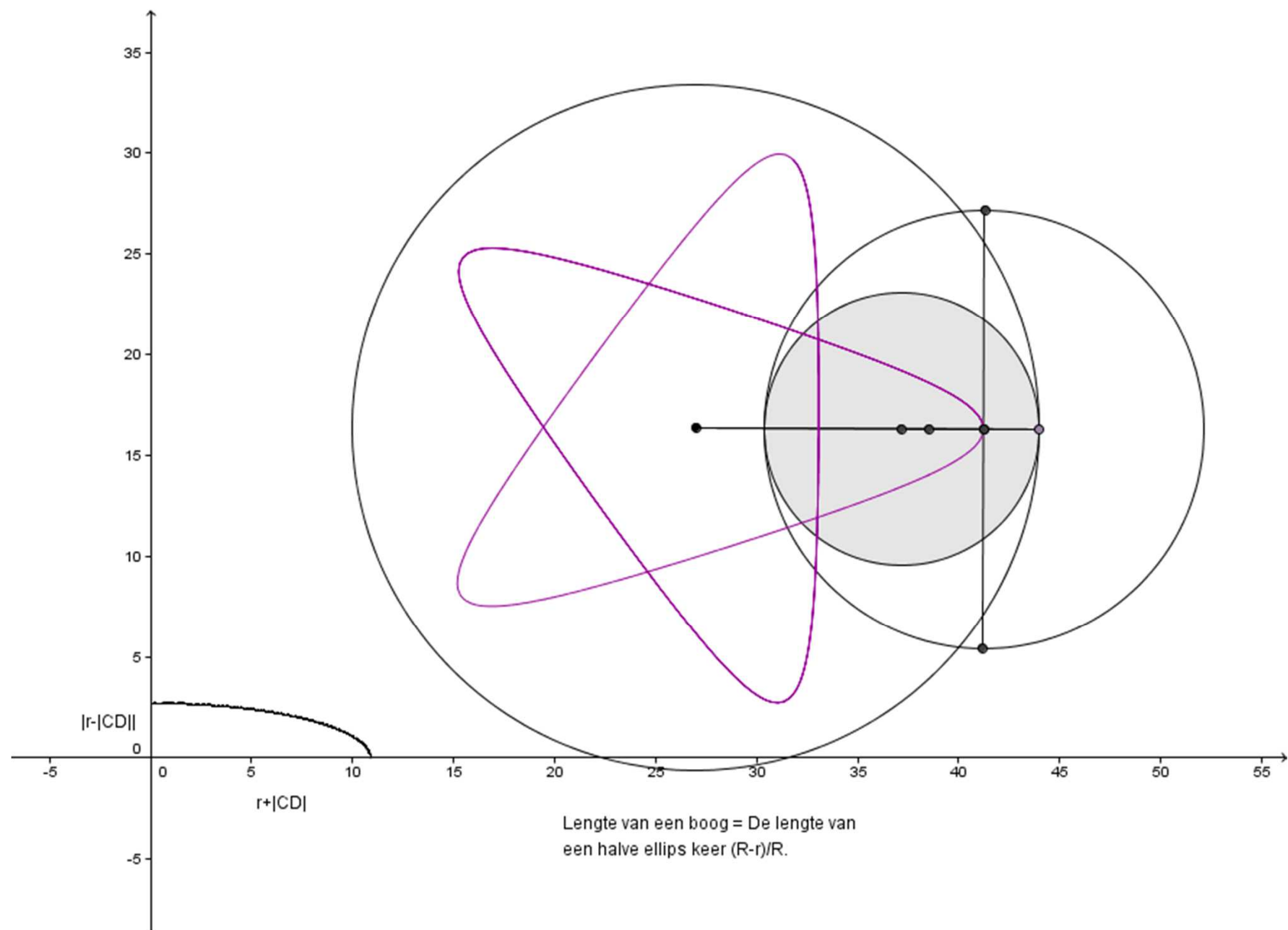


Lengte van een hypotrochoïde



Dezelfde lengte als die van een ellips





Opgave: Beleving van wiskunde door de spirograaf

Wat valt er te beleven bij de spirograaf? Geeft u per groepje vijf kenmerken of aspecten van u bezigheid met de spirograaf in deze workshop.

Forschung
& Lehre

SUPPLEMENT

Andreas Dörpinghaus

Bildung

9 | 2009

Plädoyer wider die Verdummung



Prof. Dr. Andreas Dörpinghaus

Lehrstuhl für Allgemeine
Erziehungswissenschaft
Universität Würzburg

Bildung – Dörpinghaus

„*Bildung* is een smartelijk proces, dat dijkwijs met pijn is verbonden. ...

De lust en de liefde, wat de Grieken *eros* noemden, die *Bildung* en leren vanzelf met zich mee brengen, juist in de weerbarstigheid van een onderwerp, in het worstelen om het te begrijpen en in de duur van de geconcentreerde aandacht aan het onderwerp, heeft niemand zo mooi geïllustreerd als dit de wijsgeer Plato in de oudheid in de „allegorie van de grot“ in zijn *politeia* deed.

Bildung- Dörpinghaus

Deze eros, deze lust op *Bildung*, dit proberen door iets versierd te worden en er niet meer van af kunnen blijven, omdat het ons bezig houdt en geen rust meer gunt, is – en dat is bepalend voor het begrijpen van eros – juist *geen inwendige drang* van de mens, zoals je op het eerste gezicht en door een psychologisch geschoold denkpatroon zou kunnen menen.

...

Of, om het in de woorden van Friedrich Schiller te zeggen: Wij hebben *Bildung* omdat er een wereld buiten ons is.

Wat viel er te beleven?

- Met de hand spelen, tekenen, kleuren, tellen ...
- ... praten – er is een taal nodig!
- Eigen vragen stellen op grond van ervaringen,
- Een gok doen.
- Rekenkunde, Meetkunde, Topologie, Symmetrie ... een rijke wiskundige context (HF)!
- Beziehungshaltigkeit: ggd, kgv, ellipsograaf, ...
- Polhodie – perspectiefwisseling,
- Deze eros, deze lust op *Bildung*, dit proberen versiert te worden en er niet meer van af kunnen blijven, omdat het ons bezig houdt en geen rust meer gunt.

Stephan Berendonk & Leon Van den Broek

SpiroSporen.

Zebra-Boek Serie, Utrecht: Epsilon-Uitgaven.





De spirograaf

